INGENIERIA ECONÓMICA

William Montilla

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS
MATEMÁTICA FINANCIERA
Compendio La Contabilidad
y las Organizaciones

AL LECTOR

Más de 25 años de experiencia docente en diferentes instituciones y universidades del Valle del Cauca, desde la básica secundaria hasta la cátedra en Pre grado y Post grado y más de dos décadas dedicadas a la Asesoría Empresarial en varios departamentos de Colombia, me han conducido a preparar esta primera edición del libro INGENIERÍA ECONÓMICA, que forma parte del Compendio LA CONTABILIDAD Y LAS ORGANIZACIONES.

El libro INGENIERÍA ECONÓMICA pretende introducir al lector en el campo de la matemática financiera desde la óptica del lenguaje pedagógico del aprendizaje replicado, con un texto sencillo pero técnico, con un estilo sobrio pero elegante, sin ahorrarse ningún esfuerzo, para poner en manos del lector ejercicios modelo de las producciones teóricas involucradas en cada tema.

Este libro contiene una breve recopilación de los fundamentos matemáticos que serán usados en el desarrollo de complejos ejercicios del campo de las matemáticas financieras. El modelo usado en la primera parte pretende despertar en el colectivo los principios matemáticos que subyacen las situaciones cotidianas con un enfoque formulativo de lo elemental a lo complejo, de tal suerte que se incentiven los procesos de raciocinio.

El uso de un lenguaje gráfico favorece la comprensión de las situaciones problema propuestas a lo largo del texto y la inclusión de numerosos ejercicios resueltos y propuestos hacen de esta obra una valiosa herramienta de consulta en el campo de la ingeniería Económica.

Indudablemente, falta muchísimo más por considerar con respecto a las matemáticas financieras, a la evaluación de negocios, el análisis de flujos monetarios y la evaluación de proyectos propiamente dicha, pero con razonable seguridad, este es un paso muy importante en el área financiera y brinda apoyo a la intención del autor consolidando el esfuerzo que se traduce en ésta y las otras doce obras que componen el compendio LA CONTABILIDD Y LAS ORGANIZACIONES.

EL AUTOR

William Montilla, Contador Público de la Universidad del Valle, es especialista en Administración de Empresas, Calidad, Productividad y Competitividad de la Universidad Icesi, Especialista en Revisoría Fiscal de la Universidad Santiago de Cali, Diplomado en impuestos de la Universidad Javeriana, Con estudios en Matemáticas en la Universidad del Valle, Catedrático Universitario en programas de Pregrado y Postgrado, Asesor empresarial en materia de impuestos, Finanzas, Proyectos de Inversión, Hacienda Pública, Administración, Derecho Laboral y de Sociedades en el Valle del cauca y el eje cafetero. Ha sido Candidato al CONCEJO MUNICIPAL DE PALMIRA.

Sus más de 25 años de experiencia docente lo llevan a crear en solitario un compendio académico de trece obras denominado LA CONTABILIDAD Y LAS ORGANIZACIONES que desarrolla temas en el campo contable, financiero, laboral, auditoría, costos, finanzas públicas y otras.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 1
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS 2
SISTEMAS O CAMPOS NUMÉRICOS 2
NÚMEROS DÍGITOS 2
NÚMEROS NATURALES 2
NÚMEROS ENTEROS 2
NÚMEROS RACIONALES 2
NÚMEROS IRRACIONALES 2
NÚMEROS DECIMALES 3
NÚMEROS DECIMALES FINITOS 3
NÚMEROS DECIMALES INFINITOS 3
NÚMEROS DECIMALES INFINITOS PERIÓDICOS 3
DECIMAL PERIÓDICO PURO 3
DECIMAL PERÍODICO NO PURO 3
NÚMEROS DECIMALES INFINITOS NO PERIÓDICOS 4
PORCENTAJES 4
NÚMEROS REALES. 4
NÚMEROS IMAGINARIOS 4
NÚMEROS COMPLEJOS 4
REPASO DE ALGUNOS CONCEPTOS 6
LEY DE LOS SIGNOS PARA LA MULTIPLICACIÓN Y PARA LA DIVISIÓN 6
PROPIEDAD DE LOS SIGNOS PARA LA SUMA 7
ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES 7
PROPIEDAD TRANSITIVA 7
LEY ASOCIATIVA 7
LEY CONMUTATIVA 7
LEY DEL MÓDULO O MODULATIVA 8
PARA LA SUMA 8
PARA LA MULTIPLICACIÓN 8
PROPIEDAD DEL INVERSO 8
PARA LA SUMA 8
PARA LA MULTIPLICACIÓN 8
PROPIEDAD DISTRIBUTIVA 8
DIVISIÓN DE CERO Y DIVISIÓN ENTRE CERO 9

SIGNOS DE AGRUPACIÓN 9
PRIORIDAD EN LAS OPERACIONES 10
MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO m. c. m. 11
METODO PARA DETERMINAR EL m. c. m. 11
SUMA DE FRACCIONES DE IGUAL DENOMINADOR 19
SUMA DE FRACCIONES CON DISTINTO DENOMINADOR 19
PRODUCTO DE FRACCIONES 20
DIVISIÓN DE FRACCIONES 21
POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN 23
PRODUCTO DE POTENCIAS DE IGUAL BASE 23
DIVISIÓN DE POTENCIAS DE IGUAL BASE 24
POTENCIA DE UNA POTENCIA 24
POTENCIA DE UN PRODUCTO DE DIFERENTE BASE 25
POTENCIA DE UN COCIENTE DE DIFERENTE BASE 25
EXPONENTES FRACCIONARIOS 26
PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN 27
PROBLEMAS PROPUESTOS PARA OBTENER EL MODELO Y DARLES LA SOLUCIÓN REQUERIDA POR EL PROBLEMA, SI ES POSIBLE 29
EL MODELO LINEAL 30
LA LINEA RECTA O MODELO LINEAL 30
ECUACIONES DE LA LÍNEA RECTA 30
MÁS SOBRE EL MODELO LINEAL 34
CON LA ECUACIÓN PUNTO PENDIENTE 34
CONOCIDOS DOS PUNTOS DE COORDENADAS SOBRE LA LÍNEA RECTA 36
CONOCIDO UN PUNTO DE COORDENADAS SOBRE LA LÍNEA RECTA Y LA CONDICIÓN QUE LA RECTA CUYO MODELO SE DESEA BUSCAR ES PARALELA O PERPENDICULAR A UNA RECTA CUYO MODELO ES CONOCIDO 37

CAPÍTULO 2. INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA FINANCIERA 39
MATEMÁTICA FINANCIERA 40
EL DINERO 41
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL SISTEMA FINANCIERO 41
EL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO 41
EQUIVALENCIA DEL DINERO EN EL TIEMPO 43
INTERÉS (I) 43
TASA DE INTERÉS (i) 44
TIEMPO (t) 45
MODALIDADES DE INTERÉS 45
INTERÉS SIMPLE 45
INTERÉS COMPUESTO 45

EXPRESIÓN DE LA TASA DE INTERÉS 48
LÍNEAS DE TIEMPO 49
PERÍODOS (t, EN INTERÉS SIMPLE; n, EN INTERÉS COMPUESTO) 49
VALOR PRESENTE (P) 50
VALOR FUTURO (F) 50

CAPÍTULO 3. INTERÉS SIMPLE 51
FORMULACIONES PARA EL INTERÉS SIMPLE 52
CÁLCULO DEL MONTO DE INTERÉS 52
CÁLCULO DEL VALOR FUTURO 52
CÁLCULO DEL VALOR PRESENTE 53
CÁLCULO DE LA TASA DE INTERÉS 54
CÁLCULO DEL TIEMPO 55
EQUIVALENCIA ENTRE TASAS DE INTERÉS SIMPLE 55
TALLER No. 1. INTERÉS SIMPLE 57

CAPÍTULO 4. INTERÉS COMPUESTO 58
INTERÉS COMPUESTO 59
ELEMENTOS 59
EL TIEMPO 59
LA TASA DE INTERÉS 60
LOS FLUJOS DE FONDOS 60
EQUIVALENCIA 61
CONVENCIONES 62
EQUIVALENCIA ENTRE UN FLUJO PRESENTE Y UN FLUJO FUTURO 63
VALOR FUTURO DE UN FLUJO PRESENTE 63
VALOR PRESENTE DE UN FLUJO FUTURO 64
TASA DE INTERÉS EQUIVALENTE 64
PERÍODO DE EQUIVALENCIA 65
VALOR PRESENTE Y VALOR FUTURO DE VARIOS FLUJOS DE FONDOS 66
VALOR PRESENTE DE VARIOS FLUJOS FUTUROS 66
VALOR FUTURO DE VARIOS FLUJOS PRESENTES 66

CAPÍTULO 5. ANUALIDADES (ALÍCUOTAS) 68
EQUIVALENCIA DE FLUJOS ALÍCUOTAS O ANUALIDADES 69
VALOR PRESENTE DE UNA SERIE ALÍCUOTA 69
ALÍCUOTA DE UN FLUJO PRESENTE 70
CONFECCIÓN DE LA TABLA DE PAGOS CON ALÍCUOTA 71
ALÍCUOTA Y VALOR FUTURO 73
VALOR PRESENTE DE UNA ALÍCUOTA A PERPETUIDAD 74

VALOR PRESENTE DE UNA ALÍCUOTA ANTICIPADA 74
ALÍCUOTA, PLAZO MUERTO Y PERIODO DE GRACIA 76
PLAZO MUERTO 76
PERIODO DE GRACIA 77

CAPÍTULO 6. GRADIENTES 79
INGENIERÍA ECONÓMICA – GRADIENTES 80
FORMULACIONES PARA LA PROGRESIÓN ARITMÉTICA 81
SUMA DE LOS TÉRMINOS DE LA PROGRESIÓN ARITMÉTICA 84
GRADIENTE ARITMÉTICO 86
EQUIVALENCIA DE GRADIENTE ARITMÉTICO 89
EQUIVALENCIA DE LA PORCIÓN GRADIENTE ARITMÉTICO 89
GRADIENTE GEOMÉTRICO 92
EQUIVALENCIA DEL GRADIENTE GEOMÉTRICO 92
MULTITALLER INTERÉS COMPUESTO, ALÍCUOTAS Y GRADIENTES 104

CAPÍTULO 7. TASAS DE INTERÉS 109
TASAS DE INTERÉS 110
NATURALEZA DE LAS TASAS DE INTERÉS 110
DENOMINACIONES DE LA TASA DE INTERÉS 110
CLASES DE TASAS DE INTERÉS 111
NOTACIÓN DE LAS TASAS DE INTERÉS 112
TASAS NOMINALES 112
TASAS PERIÓDICAS 113
TASA EFECTIVA 113
EQUIVALENCIA DE LAS TASAS DE INTERÉS 114
TASA PERIÓDICA Y TASA NOMINAL 114
TASA VENCIDA Y TASA ANTICIPADA 115
TASA EFECTIVA Y TASA PERIÓDICA 116
RESUMEN EQUIVALENCIA DE TASAS 118
TASAS REALES Y TASAS CORRIENTES 119
TASAS DE INTERÉS COMPUESTAS 120
TASAS COMPUESTAS POR CAMBIO DE BASE 120
TASAS MIXTAS 121
TASAS DE DESCUENTO 123
DESCUENTOS EN CADENA 124
ACEPTACIONES BANCARIAS 127

CAPÍTULO 8. EVALUACIÓN DE NEGOCIOS 132
EVALUACIÓN DE NEGOCIOS 133

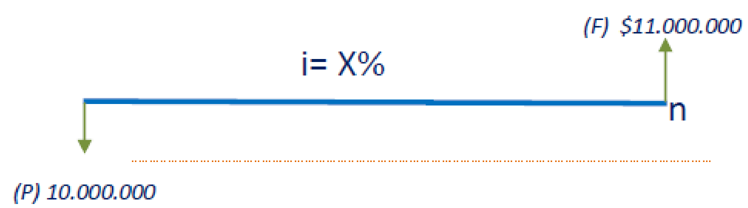
TIPOS DE NEGOCIOS 133
NEGOCIOS DE INVERSIÓN 133
NEGOCIOS DE FINANCIACIÓN 133
COSTO DE OPORTUNIDAD 134
LA TASA DE OPORTUNIDAD (I*) 135
VALOR PRESENTE NETO (VPN) 135
VALOR PRESENTE NETO (VPN) – EN EXCEL 137
TASA INTERNA DE RETORNO (TIR) 139
TIR - INTERPOLACIÓN LINEAL 140
TIR - ECUACIÓN DE LA RECTA 142
TIR - BUSCAR OBJETIVO 143
TIR - FUNCIONES FINANCIERAS EN EXCEL 146
COMPARACIÓN DE PROYECTOS 148
COMPARACIÓN DE PROYECTOS MEDIANTE EL VPN 149
COMPARACIÓN DE PROYECTOS MEDIANTE LA TIR 150
RELACIÓN BENEFICIO - COSTO *[B/C]* 154
COSTO CAPITALIZADO 155
COSTO ANUAL UNIFORME EQUIVALENTE *[CAUE]* 161
COMPARACIÓN DE PROYECTOS CON VIDAS ECONÓMICAS DIFERENTES 163
MULTITALLER EVALUACIÓN DE NEGOCIOS 168
APÉNDICE 1. MANUAL DE FÓRMULAS MÁS USADAS EN MATEMÁTICAS FINANCIERAS 171
BIBLIOGRAFÍA 175

VALOR PRESENTE (P)

Es el monto o cantidad de pesos o cualquier unidad monetaria en el momento cero, hoy, o en un momento anterior a otro denominado Futuro. [Muchos autores lo denotan VP, yo utilizo P].

VALOR FUTURO (F)

Es el monto o cantidad de pesos o cualquier unidad monetaria que equivale en un momento futuro a un valor presente, dada una tasa de interés. Ejemplo, si se invierte diez millones de pesos (P) a una tasa de interés i = x%, durante un período de tiempo n, se obtiene al final once millones (F).



Convenciones

FLUJO: Cantidad de dinero originalmente ubicada en un momento en el tiempo.

VALOR: Cantidad de dinero equivalente en un momento distinto al originalmente ubicado.

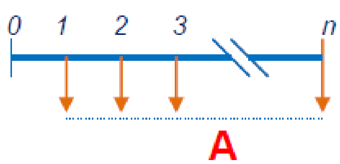
PRESENTE: [P] Fondo ubicado en el momento 0 (cero) o en un momento anterior al cual va a ser trasladado.

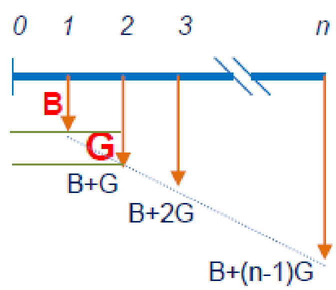
FUTURO: [F] Fondo ubicado en el momento n (último) o en un momento posterior al cual va a ser trasladado.

ALÍCUOTA: [A] Serie uniforme (cifras iguales) de fondos ubicados de forma consecutiva e ininterrumpida desde el momento 1 (uno) hasta el momento n (último).

GRADIENTE ARITMÉTICO: [G] Cantidad constante en la que crece una serie creciente de fondos ubicados de forma consecutiva e ininterrumpida desde el momento 1 (uno) hasta el momento n (último). El gradiente opera a partir del momento 2.

GRADIENTE GEOMÉTRICO: [J] Fracción o porcentaje constante en el que crece una serie creciente de fondos ubicados de forma consecutiva e ininterrumpida desde el momento 1 hasta el momento n (último). El gradiente opera a partir del momento 2.





INGENIERÍA ECONÓMICA – EQUIVALENCIA DE FLUJOS
ALÍCUOTAS O ANUALIDADES

CONCEPTO:

La Alícuota [También llamada **ANUALIDAD**] es el valor de cada cuota homogénea (o fija) que conforman una serie ininterrumpida de flujos de fondos, desde el momento 1 hasta el momento n inclusive.

Esta serie Alícuota suele llamarse también de *Anualidades*, por corresponder en muchos casos a negocios divididos en períodos anuales. Sin embargo, se prefiere el nombre de *Alícuota* para evitar la disonancia al nombrar períodos distintos al año (es mejor referirse a "alícuota mensual" que a "anualidad mensual", por ejemplo).

Valor Presente de una serie Alícuota

La expresión que relaciona la serie Alícuota con el Valor Presente es:

$$P = A \ [(1+i)^n - 1] \ / \ [i \ (1+i)^n]$$

P = Valor Presente ($)
A = Monto de cada Alícuota ($)
i = Tasa de interés para aplicar en cada período (% período/100)
n = Número de períodos de la serie Alícuota

Ejemplo: Para cancelar un préstamo al 2,5% mensual Ud. tiene que pagar 20 cuotas mensuales de $256.589 cada una; ¿cuánto dinero le prestaron?

A = $256.589
i = 2,5% = 0,025
n = 20 meses

$$P = 256.589 \ \times \ [(1+0{,}025)^{20} - 1] \ / \ [0{,}025 \ (1+0{,}025)^{20}]$$

P = <u>$ 4.000.000</u>

De la última fórmula se puede despejar A, así:

$$A = P \ [i\ (1+i)^{n]} \ / \ [(1+i)^n - 1]$$

A = Valor de la Alícuota ($)
P = Flujo Presente ($)
i = Tasa de interés para aplicar en cada período (%)
n = Número de períodos de la serie Alícuota

Ejemplo 1: Su amiga Zoila Alegría compró un automóvil Spark 2011 de $20 millones, cancelando $9 millones y financiando el resto al 1,49% mensual por tres años pagadero en alícuotas mensuales. ¿Cuál es el monto de cada alícuota, sin incluir la cuota del costo de los seguros?

P = 20.000.000 – 9.000.000 = $11.000.000
n = 3 x 12 = 36 meses

i = 1,49% = 0,0149

A = 11.000.000 $[0,0149\ (1+0,0149)^{36}]\ /\ [(1+0,0149)^{36} - 1]$
A = <u>$ 397.014</u>

Ejemplo 2: El banco le realiza un préstamo por 10 millones de pesos, el cual será cancelado en diez meses, en el sistema de alícuota mes vencido, al 2%. Calcule el valor de la alícuota..

$$A = P \ [\ i\ (1+i)^n \ ] \ / \ [\ (1+i)^n - 1]$$

Veamos la solución paso a paso:

$$A = P \quad * \quad \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

$$A = P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \quad = 10.000.000 \quad \frac{(0,02)(1+0,02)^{10}}{(1+0,02)^{10} - 1}$$

$$A = 10.000.000\frac{(0.02)\ \ (1.02)^{10}}{(1.02)^{10} - 1} \quad = 10.000.000 \quad \frac{(0,02)\ \ (1.21899441997)}{(1.21899441997 - 1)}$$

$$A = 10.000.000\frac{(0.02437988839)}{(0.21899441997)} \quad = 10.000.000 \ \ (0.1113265278\!3)$$

$$A = 1.113.265$$

Confección de la tabla de pagos con alícuota

La tabla de pagos es la proyección de los componentes de cada una de las cuotas iguales que cancelan una obligación; es decir, valor del capital aportado, valor de los intereses periódicos y el saldo tras cada pago. Para calcular dicha tabla debe tenerse en cuenta los siguientes parámetros:

- La cuota periódica es fija durante el término del préstamo

- Los intereses se calculan sobre los saldos periódicos, por lo tanto, disminuyen a medida que se pagan las cuotas

- El abono a la obligación está dado por la diferencia entre el valor de la alícuota que es constante y el valor de los intereses, los cuales van disminuyendo, con lo cual, el abono a la obligación comienza a incrementarse tras el segundo pago.

- Para el primer pago se obtiene el interés sobre el total de la deuda

Ejemplo: Confeccione la tabla de pagos correspondiente al ejemplo anterior

No.	ALICUOTA	CAPITAL	INTERES	SALDO
-	-	-	-	**10.000.000**
1	1.113.265	913.265	200.000	**9.086.735**
2	1.113.265	931.531	181.735	**8.155.204**
3	1.113.265	950.161	163.104	**7.205.043**
4	1.113.265	969.164	144.101	**6.235.879**
5	1.113.265	988.548	124.718	**5.247.331**
6	1.113.265	1.008.319	104.947	**4.239.012**
7	1.113.265	1.028.485	84.780	**3.210.527**
8	1.113.265	1.049.055	64.211	**2.161.472**
9	1.113.265	1.070.036	43.229	**1.091.437**
10	1.113.265	1.091.437	21.829	**-0**

Ejercicios de aplicación: Calcule la Alícuota en los siguientes casos:

1	A	B
	CAPITAL	15.000.000
2	MESES	6
3	INTERES	1.5%
4	ALÍCUOTA	????

2	A	B
1	CAPITAL	1.000.000
2	MESES	3
3	INTERES	2%
4	ALÍCUOTA	????

3	A	B
1	CAPITAL	10.000.000
2	MESES	5
3	INTERES	1.5%
4	ALÍCUOTA	????

4	A	B
1	CAPITAL	1.000.000
2	MESES	4
3	INTERES	1.2%
4	ALÍCUOTA	????

Respuestas → 1: $2.632.878 → 2: $346.755 → 3: $2.090.893 → 4: $257.545

INGENIERÍA ECONÓMICA – ALÍCUOTA Y VALOR FUTURO

CONCEPTO: La elección entre recibir / dar una serie de pagos periódicos iguales o un solo pago al final del término de tiempo pactado, financieramente depende de comparar las dos alternativas, para lo cual se usa la siguiente ecuación:

$$F = A \quad [(1+i)^n - 1] \ / \ i$$

F = Valor Futuro ($)
A = Monto de cada Alícuota ($)
i = Tasa de interés para aplicar en cada período (%)
n = Número de períodos de la serie Alícuota

Y, por consiguiente:

$$A = F * i / [(1+i)^n - 1]$$

A = Valor de la Alícuota ($)
F = Flujo Futuro ($)
i = Tasa de interés para aplicar en cada período (%)
n = Número de períodos de la serie Alícuota

Ejemplo: Encontrar el monto del pago único que debería efectuar Zoila Alegría, del ejemplo anterior, si contratase la modalidad de cancelar todo el préstamo al final de los tres años en lugar de hacerlo por alícuotas:

A = $397.014
i = 1,49% = 0,0149
n = 36 meses

Una alternativa es encontrar P y luego F:

$$P = 397.014 \times [(1+0{,}0149)^{36} - 1] / [0{,}0149\ (1+0{,}0149)^{36}] = 11.000.000$$

$$F = 11.000.000 \times (1+0{,}0149)^{36} = \underline{\$\ 18.733.959}$$

Otra alternativa de cálculo es encontrar F directamente de A:

$F = 397.014 \times [(1+0,0149)^{36} - 1] / 0.0149 = \underline{\$ 18.733.959}$

Valor Presente de una Alícuota a Perpetuidad

Un caso de mucha utilidad en Finanzas es considerar la vida del negocio como perpetua (en la realidad, plazos mayores a 20 años en Colombia y a 50 años en Estados Unidos se pueden considerar como tales; el valor presente de una alícuota perpetua se obtiene con la siguiente fórmula:

$$P_{n\to\infty} = A / i$$

P = Valor Presente ($)
A = Monto de cada Alícuota ($)
i = Tasa de interés para aplicar en cada período (% período/100)
$n\to\infty$ (n tiende a infinito) número de períodos de la serie Alícuota

Ejemplo: Una compañía norteamericana emite bonos perpetuos, los cuales pagan un cupón (monto de interés) de $USD 90 anuales. Hallar el precio actual de cada bono si la tasa de interés de los bonos para hoy es del 8% anual:

A = $USD 90
i = 8% anual = 0,08
n = $n\to\infty$
P = 90 / 0,08 = <u>$USD 1.125</u>

Valor Presente de una Alícuota Anticipada

La Alícuota anticipada se da al comienzo de cada período, por lo tanto, la serie comienza en el momento 0 (cero). Con la misma técnica que se deduce la formulación para la alícuota vencida, se deducen para la anticipada las siguientes

Fórmulas:

$$P = A_a \, [\, (1+i)^{n} - 1 \,] \, / \, [\, i \, (1+i)^{n-1} \,]$$

y,

$$A_a = P \, [i \, (1+i)^{n-1}] \, / \, [\, (1+i)^{n} - 1]$$

$P =$ Valor Presente ($)
$A_a =$ Monto de cada Alícuota pagadera anticipadamente ($)
$i =$ Tasa de interés para aplicar en cada período (%)
$n =$ Número de períodos de la serie Alícuota

Ejemplo: Para cancelar un préstamo al 2,5% mensual Ud. tiene que pagar 20 cuotas mensuales anticipadas de $256.589 cada una; ¿cuánto dinero le prestaron?

$A_a =$ $256.589
$i =$ 2,5% = 0,025
$n =$ 20 meses

$$P = 256.589 \times [(1+0{,}025)^{20} - 1] \, / \, [0{,}025 \, (1+0{,}025)^{20-1}]$$

P = <u>$ 4.100.000</u>

Alícuota, Plazo Muerto y Período de Gracia

Plazo Muerto

PLAZO MUERTO es un período en el cual no se hacen pagos ni se contabilizan intereses. Este tipo de crédito suele usarse para el fomento de áreas o sectores específicos e la economía, principalmente el Agro colombiano y regiones deprimidas por el conflicto socio político.

Para efectos de calcular las cuotas se debe correr (sin modificación) el capital o Flujo Presente o Principal desde el momento 0 hasta el final del plazo muerto, mientras que el número de períodos para pago de cuotas se disminuye justamente en el número de períodos que contenga el plazo muerto.

$$A = P \; [\, i\,(1+i)^{n} \,] \;/\; [\,(1+i)^{n} - 1]$$

$$A_{PM} = P \; [\, i\,(1+i)^{n-PM} \,] \;/\; [\,(1+i)^{n-PM} - 1]$$

Ejemplo: Hallar el Valor de la Alícuota mensual que paga un préstamo de $10.000.000 a cinco años, con un interés mensual del 2% si se pacta un plazo muerto de un año.

P = $10.000.000
n = 5 x 12 = 60 meses
i = 2% = 0,02
PM = 12 meses

$$A = 10.000.000 \; [0,02\,(1+0,02)^{60-12}] \,/\, [(1+0,02)^{60-12} - 1]$$

$$A = \underline{\$\ 326.018}$$

Período de Gracia

PERIODO DE GRACIA es un intervalo de tiempo durante el cual no se efectúan pagos de un préstamo, pero sí se contabilizan intereses, los cuales usualmente se acumulan al Capital inicial. Este modelo de crédito menos benévolo que el de Plazo Muerto, también es un herramienta de la Banca de Fomento.

Para efectos de calcular las cuotas se debe mover el Principal hasta el final de período de gracia, ajustándolo como un Valor Futuro desde el momento inicial

$$A = P\ [\ i\ (1+i)^{n}\ ]\ /\ [\ (1+i)^{n} - 1]$$

Cambiando P por su valor futuro en el Periodo de Gracia PG

$$A_{PG} = P\ (1+i)^{PG}\ [\ i\ (1+i)^{n-PG}\ ]\ /\ [\ (1+i)^{n-PG} - 1]$$

Organizando la expresión

$$A_{PG} = P\ i\ [\ (1+i)^{PG}\ (1+i)^{n-PG}\ ]\ /\ [\ (1+i)^{n-PG} - 1]$$

Sumando algebraicamente los exponentes de (1+i)

$$A_{PG} = P\ i\ [\ (1+i)^{PG+n-PG}\ ]\ /\ [\ (1+i)^{n-PG} - 1]$$

Listo…

$$A_{PG} = P\ i\ [\ (1+i)^{n}\ ]\ /\ [\ (1+i)^{n-PG} - 1]$$

Ejemplo: Hallar el Valor de la Alícuota mensual que paga un préstamo de $10.000.000 a cinco años, con un interés mensual del 2% si se pacta un Periodo de Gracia de un año.

P = $10.000.000
n = 5 x 12 = 60 meses
i = 2% = 0,02
PM = 12 meses

$A = 10.000.000\ [0{,}02\ (1+0{,}02)^{60}]\ /\ [(1+0{,}02)^{60-12} - 1]$

A = <u>$ 413.470</u>

EQUIVALENCIA DEL GRADIENTE ARITMÉTICO

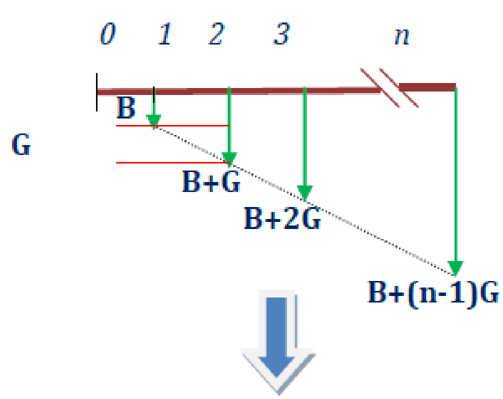
Equivalencia de La Porción Gradiente Aritmético

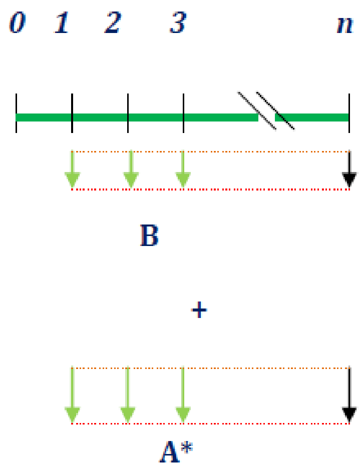
Para convertir la serie de la porción del Gradiente Aritmético a una serie Alícuota es posible deducir matemáticamente la siguiente relación de equivalencia:

$$A^* = G \ \{1/i - n / [(1+i)^n - 1]\}$$

A* = Valor de la Alícuota equivalente a la serie de Gradientes ($)
G = Monto del Gradiente Aritmético ($)
i = Tasa de interés para aplicar en cada período (%)
n = Número total de períodos para el negocio

Nótese que A* representa solo la serie Alícuota del Gradiente, sin incluir la base (B) o monto de alícuotas iguales a la primera cuota, lo que reemplaza la serie inicial por dos series de cuotas, como se muestra en el gráfico:





El Valor de la Alícuota equivalente al plan completo está dado por la suma de las dos series, como se expresa a continuación:

$$A = B + A^*$$

A = Valor de la Alícuota equivalente a la serie completa de cuotas ($)
B = Monto de la primera cuota de la serie original de cuotas ($)
A* = Valor de la Alícuota equivalente a la serie de Gradientes ($)

La relación anterior se emplea como paso intermedio para encontrar uno de los valores: Presente (P), primera cuota (B) o Gradiente (G), según el caso, aplicando adicionalmente una de las fórmulas de equivalencia entre Alícuota y Valor Presente.

Ejemplo 1: Encontrar el valor del préstamo que tomó la señora María Pérez Ossa y que le representa un plan de 72 pagos mensuales cuya primera cuota se tasa en $300.000, incrementándose en $10.000 mensuales, si la tasa de interés que se aplica es del 2% mensual:

B = $300.000
G = $10.000
n = 72
i = 2%

$A^* = 10.000\ (1/0,02 - 72/[(1+0,02)^{72} - 1)] = \$\ 272.234$

$A = 300.000 + 272.234 = \$ 572.274$

$P = 572.274 \; [(1+0,02)^{72} - 1] / [0,02 \; (1+0,02)^{72}] = \underline{\$ 21.735.772}$

Ejemplo 2: ¿Cuál es el valor de la última cuota que pagará la señora Pérez Ossa del ejemplo anterior?

$B = \$300.000$
$G = \$10.000$
$n = 72$

$FF_{72} = 300.000 + (72 - 1) \; 10.000 = \underline{\$ 1.100.000}$

Ejemplo 3: La empresa REMINGTON Ltda. accede a un préstamo de \$500.000.000 que pagará por ocho años al 2% mensual, comprometiendo un plan de pagos en el que la primera cuota será de \$10.000.000 y se incrementará en un valor constante cada mes.

Calcule:

a) El valor del gradiente mensual.

b) El monto correspondiente a la última cuota de pago.

a) $P = \$500.000.000$
$i = 2\%$ mensual
$n = 8 \times 12 = 96$ meses

$A = 500.000.000 \; [0,02 \; (1+0,02)^{96}] / [(1+0,02)^{96}-1]$
$A = \$ 11.756564$

$B = \$10.000.000$
$A^* = VA - B$
$A^* = 11.756.564 - 10.000.000 = \$ 1.756.564$

$G = A^* / \{1/i - n / [(1+i)^n - 1]\}$
$G = 1.756.564 / \{ 1/0,02 - 96 / [(1+0,02)^{96} - 1] \}$

$G = \underline{\$ 53.009}$

b) $FF_{96} = 10.000.000 + (96 - 1) \; 53.009 = \underline{\$ 15.035.870}$

Ejemplo 4: Si para el caso del ejemplo anterior, REMINGTON asumiera un gradiente de $100.000 mensuales, calcular:

a) El monto correspondiente a la primera cuota.
b) El monto correspondiente a la última cuota de pago.

a) P = $500.000.000
i = 2% mensual
n = 8 x 12 = 96 meses

$A = 500.000.000\ [0{,}02\ (1+0{,}02)^{96}]\ /\ [(1+0{,}02)^{96}-1]$
A = $ 11.756564

G = $100.000
$A^* = 100.000\ \{\ 1/0{,}02\ -\ 96\ /\ [(1+0{,}02)^{96} - 1]\ \} =$ $ 3.313.699

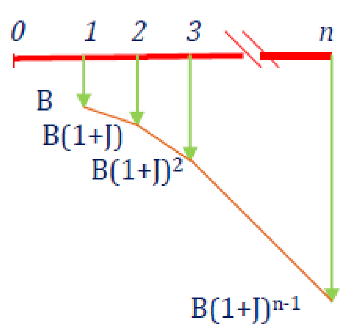
B = VA - A*

B = 11.756.564 - 3.313.699 = <u>$ 8.442.865</u>

b) $FF_{96} = 8.442.865 + (96 - 1)\ 100.000 =$ <u>$ 17.942.865</u>

GRADIENTE GEOMÉTRICO

La serie de cuotas del gradiente geométrico es:



MULTITALLER:

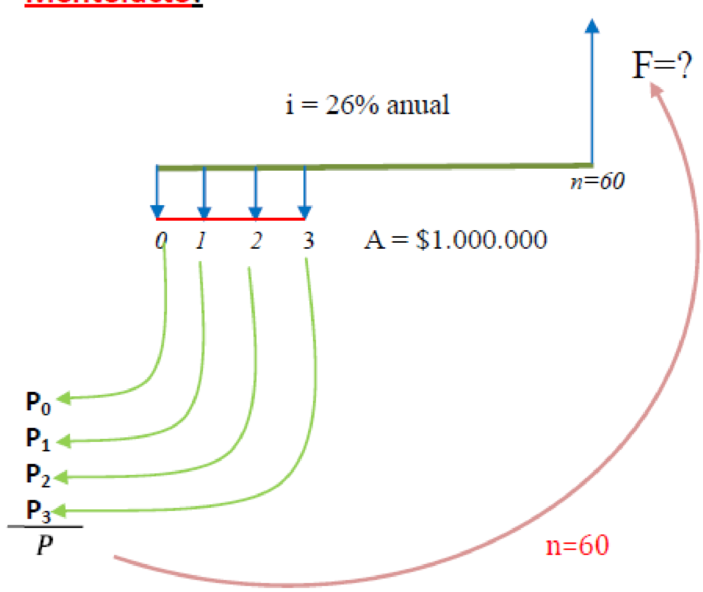
INTERÉS COMPUESTO – ALÍCUOTAS - GRADIENTES

A continuación, un misceláneo **RESUELTO** de problemas con Interés Compuesto, Alícuotas y Gradientes. En cada caso se presenta el razonamiento tras la solución

1. En el plan SUPER SUPER usted deposita un millón de pesos cada año a partir del momento de inscripción, hasta completar cuatro depósitos, cuando recibe un título a nombre de su primer nieto, quien lo puede redimir al cumplirse 60 años de haber realizado el primer depósito. Si el plan ofrece un rendimiento del 26% anual, calcule el monto que le corresponderá a su nieto. (R/. \$3”076.994´028.000)

Aquí se debe pasar los 4 pagos a un solo momento y luego se lleva la suma de los 4 a valor futuro. Si se pasan todos al momento cero, se suman y se calcula el futuro con n = 60. Si se llevan todos al final del año 3, cuando se hace el cuarto depósito, suman los 4 y se calcula el futuro con n = 57. Recuerde que el primer pago ocurre al inicio de la operación.

Mentefacto:



P_1 = - $1.000.000

$$P_2 = \frac{F_2}{(1+i)^n} = \frac{1.000.000}{(1+0{,}26)^1} = \frac{1.000.000}{1{,}26} = \$793.651$$

$$P_3 = \frac{F_3}{(1+i)^n} = \frac{1.000.000}{(1+0{,}26)^2} = \frac{1.000.000}{1{,}5876} = \$629.882$$

$$P_4 = \frac{F_4}{(1+i)^n} = \frac{1.000.000}{(1+0{,}26)^3} = \frac{1.000.000}{2{,}000376} = \$499.906$$

P = $2.923.439

Ahora se lleva ese único presente a valor futuro con n = 60

F = P $(1 + i)^n$= $2.923.439 $(1+0{,}26)^{60}$ = **$3"076.994´028.000**

2. En el problema anterior, calcule el monto final si usted deposita los cuatro millones de pesos de una vez. (R/. $4"210.102´780.000)

Se requiere hallar el valor futuro que de $4.000.000, conociendo la tasa de interés, el número de períodos y el capital:

F =	**?**
P =	$4.000.000
i =	26% anual → 0,26
n =	60 años

F = P $(1 + i)^n$= $4.000.000 $(1+0{,}26)^{60}$ = **$4"210.102´781.098**

3. Fiduciaria YURANY ofrece un fondo que renta el 8% semestral.
   a. Calcule el monto que retira un ahorrador que invierte $10 millones por siete años.

Se requiere hallar el valor futuro que retirará el ahorrador, conociendo la tasa de interés, el número de períodos y el capital:

F =	**?**
P =	$10.000.000
i =	8% semestral ➔ 0,08
n =	7 años ➔ 14 semestres

$F = P\ (1 + i)^n = \$10.000.000\ (1+0{,}08)^{14}$ **= $29.371.936**

   b. Otro inversionista coloca $10 millones en el fondo, retirando $5 millones a los cinco años y el resto tres años más tarde. Calcule el valor de este último retiro.

Aquí el horizonte temporal se compone de dos (2) tramos: El primero al quinto años, cuando se liquida el valor futuro de la inversión y se realiza un retiro, el segundo inicia entonces y va por tres (3) años con el nuevo capital.

F_1 =	**?**
P_1 =	$10.000.000
i =	8% semestral ➔ 0,08
n_1 =	5 años ➔ 10 semestres

$F_1 = P_1\ (1 + i)^n = \$10.000.000\ (1+0{,}08)^{10} = \$21.589.250$

Al cabo de 5 años tiene un disponible de =$21.589.250, de los cuales saca $5.000.000 e invierte los restantes $16.589.250, así:

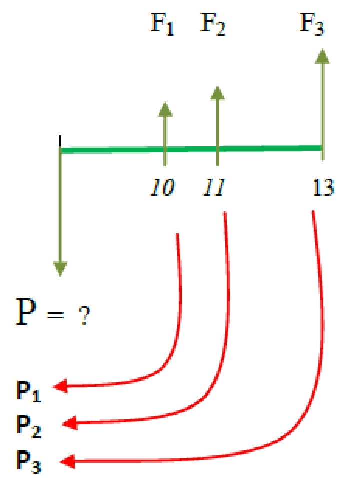
F_2 =	**?**
P_2 =	$16.589.250
i =	8% semestral ➔ 0,08
n_2 =	3 años ➔ 6 semestres

$F_2 = P_2\ (1 + i)^n = \$16.589.250\ (1+0{,}08)^6 =$ **$26.325.055**

4. Calcular el valor de la partida de un fondo de pensiones para una oficina gubernamental que estima necesitar 100, 150 y 200 millones de pesos para dentro de 10, 11 y 13 años respectivamente, si se espera un rendimiento del 24% anual.

Aquí habrá que hacer tres (3) pagos futuros, por lo tanto, debe calcularse el valor presente (P) de cada uno y sumarlos para hallar el valor presente total que garantiza los recursos futuros en cada fecha. $P = \sum P_1 + P_2 + P_3$

Mentefacto:



P =	**?**
F_1 =	\$100.000.000
F_2 =	\$150.000.000
F_3 =	\$200.000.000

P =	**?**
n_1 =	10 años
n_2 =	11 años
n_3 =	13 años

$$P_1 = \frac{F_1}{(1+i)^n} = \frac{100.000.000}{(1+0{,}24)^{10}} = \frac{100.000.000}{8{,}59442551} = \$11.635.449$$

$$P_2 = \frac{F_2}{(1+i)^n} = \frac{150.000.000}{(1+0{,}24)^{11}} = \frac{150.000.000}{10{,}65708763} = \$14.075.140$$

$$P_3 = \frac{F_3}{(1+i)^n} = \frac{200.000.000}{(1+0{,}24)^{13}} = \frac{200.000.000}{16{,}38633794} = \$12.205.290$$

P = \$11.635.449 + \$14.075.140 + \$12.205.290 = **\$37.915.879**

5. Un viejo amigo de su abuelo quiere saldar una deuda de $1.000 que contrajo con él hace 50 años y que nunca canceló. Calcule el monto actual que Ud. le sugiere pagar, considerando una tasa del 25% anual. (R/. $70´064.923)

> Se requiere hallar el valor futuro que saldará la deuda, conociendo la tasa de interés, el número de períodos y el capital:

F =	?
P =	$1.000
i =	25% anual → 0,25
n =	50 años

$F = P\ (1 + i)^n = \$1.000\ (1+0,25)^{50} = \$1.000\ (70.064,\underline{9232}) =$ **$70.064.923**

6. Calcule el monto de la deuda que tiene un estudiante al cabo de su postgrado, cuando ha recibido un préstamo de 40 millones de pesos de parte del ICETEX para estudiar en el extranjero por tres años, si el interés pactado es del 12% anual. (R/. $56´197.120)

> Se requiere hallar el valor futuro de la deuda, conociendo la tasa de interés, el número de períodos y el capital:

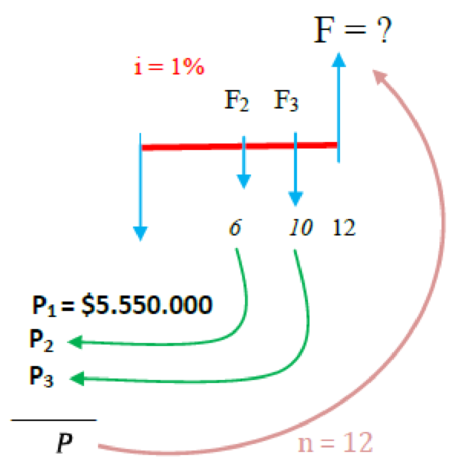
F =	?
P =	$40.000.000
i =	12% anual → 0,12
n =	3 años

$F = P\ (1 + i)^n = \$40.000.000\ (1+0,12)^3 = \$40.000.000\ (1,\underline{404928}) =$ **$56.197.120**

7. Lina Marcela aprovecha los excedentes de su negocio para realizar depósitos en su cuenta de ahorros, que renta el 1% mensual, así: $5´550.000 al abrir su cuenta, $1´230.000 a los seis meses y $6´000.000 cuatro meses después. Calcule el monto del interés ganado y el capital reunido al año de haber abierto la cuenta.

Aquí habrá que bajar los tres (3) valores futuros a valor presente para luego llevar ese único presente a valor futuro. $P = \sum P_1 + P_2 + P_3$

Mentefacto:



P =	**?**
F_2 =	$1.230.000
F_3 =	$6.000.000
i =	1% → 0,01

P =	**?**
n_2 =	6 años
n_3 =	10 años
i =	1% → 0,01

P_1 = - $5.550.000

$$P_2 = \frac{F_2}{(1+i)^n} = \frac{1.230.000}{(1+0{,}01)^6} = \frac{1.230.000}{1{,}06152} = \$1.158.716$$

$$P_3 = \frac{F_3}{(1+i)^n} = \frac{6.000.000}{(1+0{,}01)^{10}} = \frac{6.000.000}{1{,}10452} = \$5.431.722$$

P = $12.140.438

Ahora se lleva ese único presente a valor futuro con n = 12

$F = P\ (1 + i)^n = \$12.140.438\ (1+0,01)^{12} =$ **$13.680.149**

Ahora la diferencia entre futuro (F) y presente (P) es el interés (I) ganado

I = $13.680.149 - $12.780.000 = **$.900.149**

8. Escoja la mejor alternativa para reclamar el premio MI MEJOR JUGADA, que acaba de ganar, contando con que Usted puede rentar el dinero al 20% anual:

A) Recibir cinco millones de pesos hoy,
B) Recibir $10 millones dentro de tres años,
C) Recibir $20 millones dentro de seis años,
D) Recibir $5 millones dentro de tres años y $10 millones dentro de seis años.

Aquí habrá qué bajar los tres (3) valores futuros a valor presente para compararlos con los $5.000.000 y entre ellos, así, se escoge el mayor valor presente que será la mejor opción:

P =	**?**
F_B =	$10.000.000
F_C =	$20.000.000
F_D =	$5.000.000 en n= 3 y $10.000.000 en n=6

P =	**?**
n_B =	3 años
n_C =	6 años
n_D =	3 años y 6 años

P_1 = - $5.000.000

$$P_2 = \frac{F_2}{(1+i)^n} = \frac{10.000.000}{(1+0{,}20)^3} = \frac{10.000.000}{1{,}728} = \$5.787.037$$

$$P_3 = \frac{F_3}{(1+i)^n} = \frac{20.000.000}{(1+0{,}20)^6} = \frac{20.000.000}{2{,}985984} = \$6.697.960$$

$$P_{4A} = \frac{F_{4A}}{(1+i)^n} = \frac{5.000.000}{(1+0{,}20)^3} = \frac{5.000.000}{1{,}728} = \$2.893.519$$

$$P_{4B} = \frac{F_{4B}}{(1+i)^n} = \frac{10.000.000}{(1+0{,}20)^6} = \frac{10.000.000}{2{,}985984} = \$3.348.980$$

P_4 = $2.893.591 + $3.348.980 = $6.242.499

R/: Se concluye que la opción P_3 es la mejor alternativa porque presenta un mayor valor presente $6.697.960

9. Con una tasa de inflación promedia del 18% anual, para los últimos 40 años en Colombia, establezca a cuánto dinero de hace 40 años equivalen $1 millón de hoy. (R/. $1.332,66)

Se requiere hallar el valor Presente hace 40 años de un futuro de $1.000.000, con una tasa de interés del 18% anual:

P =	?
F =	$1.000.000
i =	18% anual ➔ 0,18
n =	40 años

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{1.000.000}{(1+0{,}18)^{40}} = \frac{1.000.000}{750{,}378345} = \$1332{,}66$$

10. Una póliza de capitalización de $10 millones hoy promete devolver $100 millones dentro de 10 años. Calcule el depósito equivalente en un fondo mutuo que renta el 20% anual, y escoja la mejor opción para un ahorrador.

> Se requiere hallar el valor Presente que devuelve $100 millones en diez años a una tasa de interés del 20% anual, para comparar ese presente con los $10 millones que nos exige la póliza y escoger la menor inversión:

P =	?
F =	$100.000.000
i =	20% anual ➔ 0,20
n =	10 años

$$P = \frac{F}{(1+i)^n} = \frac{100.000.000}{(1+0{,}20)^{10}} = \frac{100.000.000}{6{,}19173642} = \$16.150.558$$

R/: Se escoge la póliza porque con sólo $10 millones devuelve los $100 en diez años, mientras que el fondo mutuo requiere un depósito hoy de $16.150.558.

MULTITALLER:

INTERÉS COMPUESTO – ALÍCUOTAS - GRADIENTES

A continuación, un misceláneo **PROPUESTO** de 44 problemas con Interés Compuesto, Alícuotas y Gradientes. Para los primeros 16 ejercicios se incluye como retroalimentación la respuesta.

1. Marcela invierte $5 millones cada año por espacio de tres años en un fondo que renta el 21% anual. Calcule el capital que tendrá dentro de 10 años en el fondo si no retira entretanto ningún dinero. [R/: 84.411.951]

2. Usted va a ausentarse del país durante cinco años, pero desea depositar en una cuenta de ahorros una cantidad de dinero tal que a su regreso cuente con $100 millones. Calcule el monto que debe depositar si espera que la cuenta le rente un 11% anual. [R/: 59.345.133]

3. Calcule en cuánto puede venderse un bono de $3 millones pagaderos en el momento de su redención, exactamente dentro de dos años, si el interés que da el mercado de bonos es del 12% anual. [R/: 2.391.582]

4. Calcule el valor de cada una de las tres cuotas anuales que depositadas en un fondo que renta el 15% anual permiten retirar $10 millones dentro de 10 años. [R/: 941.402]

5. Usted debe pagar un préstamo de $10 millones en cuatro cuotas semestrales de $3.500.000. Calcule el depósito equivalente que debe hacer en un fondo que le reconoce el 1% mensual para pagar dicho préstamo. [R/: 12.127.870]

6. Determine el monto de la alícuota anual que paga un préstamo de $50 millones al 2% mensual por 6 años. [R/: 16.553.708]

7. Calcule el monto del principal que tasa una alícuota mensual de $100.000 por 10 años a un interés del 1,5% mensual. [R/: 5.549.845]

8. Usted decide manejar su propio fondo llamado MINIETO, depositando cada año la suma de $1 millón en una cuenta de ahorros que rinde el 10% anual. Calcule el monto que puede retirar su nieto dentro de 40 años. [R/: 42.592.556]

9. Calcule el valor de la alícuota mensual que paga un préstamo en 12 meses, con un interés del 2% mensual, si ella se debe pagar anticipadamente cada período. [R/: 0,092705486 P]

10. Calcule el monto del préstamo al que se le aplica una tasa del 1,5% mensual, si el pago anticipado por cuota fija se tasa en $100,000 por mes, durante 24 meses. [R/: 2.033.086]

11. Calcule la alícuota mensual que paga un bono a perpetuidad de $1 millón, con un interés del 2%. [R/: 20.000]

12. El Fondo de Pensiones REMINGTON ofrece tres planes básicos que debe escoger la persona en el momento de ingresar al fondo, todos bajo los mismos aportes:

    A: Cuota única de jubilación de $200.000.000 al cumplimiento de los requisitos.
    B: Mesada de $3.000.000 durante 10 años.
    C: Mensualidad fija de $2.200.000 hasta su muerte (suponga perpetuidad).

    Escoja el plan más conveniente para Usted, si espera que la tasa de interés cuando se jubile sea del 1% mensual. [R/: C: 220.000.000 > B: 209.101.566 > A: 200.000.000]

13. Diga cuál de los planes de inversión es más atractivo y por qué:

    A: Inversión al 16% anual por cuatro años.
    B: Mitad de la inversión al 20% anual por cuatro años y mitad de la inversión al 12% anual por cuatro años. [R/: B: 1,82355968 P > A: 1,81063936 P]

14. Calcule el número de períodos para el cual el valor presente equivalente se hace igual a 10 veces la alícuota, a un interés del 2%. [R/: n = 11,27 meses]

15. Asumiendo el precio de la UVR hoy en $112, y una inflación promedia del 10% anual, calcule el precio de la UVR dentro de 15 años. [R/. $467,85]

16. ¿Cuántos pesos debe pagar dentro de un año para cancelar completamente una deuda contraída por 50.000 dólares, si la tasa de cambio hoy es de $2.000/US$, y se espera que suba al 25% anual? [R/. $125´000.000]

17. Calcule el valor presente de un préstamo a cinco años que establece un gradiente aritmético de $20.000 mensuales sobre su primera cuota de $120.000, con una tasa de interés del 2% mensual.

18. Calcule le valor del gradiente aritmético para un préstamo de $80 millones a 10 años y con una tasa de interés del 1,5% mensual, si se requiere que la primera cuota sea de $400.000. Calcule el monto de la última cuota.

19. Resuelva el problema anterior, considerando un período de gracia de un año.

20. Resuelva el problema tras anterior, considerando un plazo muerto de dos años.

21. Calcule el valor de la anualidad que paga un préstamo de $100 millones a cinco años, si el interés para el primer año es del 10% y va incrementándose en 5% cada año.

22. Para el problema anterior, calcule la tasa única equivalente a las cinco tasas que se cobran en él

23. Calcule el valor presente de un gradiente geométrico del 5% por 20 trimestres, sobre una primera cuota de $200.000, con una tasa de interés del 4% trimestral.

24. Calcule el valor de la primera cuota de un préstamo de $25 millones por ocho años, al 2,1% mensual, de tal manera que se mantenga un gradiente geométrico del 1% mensual.

25. Usted realiza hoy un depósito de cien millones de pesos en un fondo que opera en dólares y que renta el 6% anual en esta moneda. ¿Cuánto dinero en pesos retirará dentro de cinco años, si espera una tasa de incremento de la tasa de cambio del 27% anual?

26. Con cuánto dinero se cancela hoy una deuda de $100.000 suscrita hace exactamente 30 años si se reconocerá una tasa de interés anual de 18%.

27. Un automóvil se compra hoy en $20 millones; se espera que dentro de cinco años se pueda vender en $20 millones. Calcular el consumo de capital en $ de hoy, si el valor del dinero se tasa en el 20% anual.-

28. Calcular el valor de la alícuota que paga un préstamo de $100 millones por 60 meses, suscrito al 2% mensual los primeros tres años y al 3% mensual el resto.

29. Calcule el valor de cada pago mensual de un préstamo de $50 millones por cinco años, al 2% mensual, si la alícuota de los últimos dos años se debe calcular como el doble de la alícuota correspondiente a los tres primeros años

30. Calcule el valor de la alícuota mensual que paga un préstamo en 12 meses, con un interés del 2% mensual, si ella se debe pagar anticipadamente cada período.

31. Calcule el monto del préstamo al que se le aplica una tasa del 1,5% mensual, si el pago anticipado por cuota fija se tasa en $100,000 por mes, durante 24 meses.

32. La financiera BANGA AGIL le otorga un préstamo a su empresa por $1.000 millones para cancelar a 10 años con un plazo muerto de un año y un interés del 2% mensual.

    a) Calcule el valor de la alícuota mensual correspondiente.

    b) Calcule el valor del pago único equivalente al final de los 10 años.

33. Resuelva el problema anterior si el plazo muerto se cambia por un período de gracia.

34. Explique por qué, para la misma tasa de interés, es más conveniente tomar un préstamo con plazo muerto que con período de gracia.

35. Calcule la alícuota mensual que paga un bono a perpetuidad de $1 millón, con un interés del 2%.

36. Calcule el precio de un bono a perpetuidad que paga cupones de $100.000 trimestrales, si la tasa de interés en el mercado es del 4% trimestral.

37. El Fondo de Pensiones LALO CURA ofrece tres planes básicos que debe escoger la persona en el momento de ingresar al fondo, todos bajo los mismos aportes:

    A: Cuota única de jubilación de $200.000.000 al cumplimiento de los requisitos.
    B: Mesada de $3.000.000 durante 10 años.
    C: Mensualidad fija de $2.200.000 hasta su muerte (suponga perpetuidad).

    Escoja el plan más conveniente para Usted, si espera que la tasa de interés cuando se jubile sea del 1% mensual.

38. Usted suscribe una inversión de capital por cinco años que le entrega un alícuota anual a un interés del 14% anual; los pagos recibidos los reinvierte en una cuenta de ahorros al 6% anual hasta el final de los cinco años.

    Calcule el porcentaje de incremento de la cifra inicialmente invertida.

    Calcule la tasa de interés equivalente para la inversión.

39. Calcule el número de períodos para el cual el valor presente equivalente se hace igual a 12 veces la alícuota, a un interés del 3%.

40. Calcule el monto final equivalente del siguiente plan de inversiones: 10 depósitos mensuales de $1 millón cada uno, un año sin movimientos y luego 10 depósitos mensuales de $2 millones cada uno, si el fondo gana 2,5% mensual.

41. Calcule los respectivos montos de las cuotas anuales números 1, 5 y 10 de amortización de un préstamo por $100 millones pagaderos a 10 años, a una tasa de interés del 10% anual y gradiente de $500.000 por año.

42. Entre los planes de pago por alícuota, gradiente aritmético y gradiente geométrico:

    a) Explicar cuál paga mayor cuota que los demás al comienzo del período de amortización.

    b) Explicar cuál paga mayor cuota que los demás al final del período de amortización.

43. Explique si el aumento del precio de la UVR corresponde a un gradiente aritmético o a un gradiente geométrico.

44. Explique si la inflación sigue un patrón de gradiente aritmético o de gradiente geométrico.

INGENIERÍA ECONÓMICA – TASAS DE INTERÉS

CONCEPTO:

La tasa de interés (i) representa el valor del alquiler del dinero; se presenta normalmente como un porcentaje que se aplica al capital por unidad de tiempo: Día, mes, bimestre, trimestre, semestre, año, etc.

NATURALEZA DE LAS TASAS DE INTERÉS

El interés puede exigirse al vencimiento o anticipadamente, según se estipule en el contrato (así como el canon de arrendamiento se acostumbra cobrar anticipadamente o el salario se acostumbra pagar al vencimiento del período). En la práctica, se entienden "por defecto" que si una tasa no se declara simple, se entiende COMPUESTA; si no se declara anticipada, se entiende VENCIDA.

Denominaciones de la Tasa de Interés

Según la manera en la que una tasa de interés proponga la información se le denomina de una de estas tres maneras:

Periódica: La tasa corresponde al período de composición (% por día, mes, bimestre, trimestre, semestre, año, etc.).

Nominal: Es la expresión anualizada de la Tasa Periódica, contabilizada por acumulación simple de ella. El tratamiento corresponde al de Tasas de Interés Simple.

Ejemplo 3: Calcule el interés efectivo de la tasa 16% sv.

Aplicando la fórmula de conversión:

$ie = (1+ipv)^n - 1$

$ie = (1 + 0.16)^2 - 1$

$ie = (1,16)^2 - 1$

$ie = (1,16)^2 - 1$

$ie = 1,3456 - 1$

$ie = 0,3456$

$ie = 34,56\%$

Ruta de cálculo con Excel:

	A	B	C
1	ipv	16%	Tasa de interés periódico vencido
2	n	2	número de períodos semestrales contenidos en un año
3	ie	=(1+B1)^B2-1┘	R/: 0,3456 [interés efectivo]
4	A la celda B3 se le da notación en estilo porcentual (%) y aparece 34,56%		

Con calculadora científica:

16	÷	100	=	+	1	=	X^n	2	=	-	1	=	x	100	=

Resumen Equivalencia de Tasas

SALIDA ➔	LLEGADA	
	VENCIDA	ANTICIPADA
i.n.v.	$ipv = inv / n$ $ie = (1 + inv/n)^n - 1$	$ipa = inv / (n + inv)$ $ina = (n * inv) / (n + inv)$
i.p.v.	$inv = ipv * n$ $ie = (1 + ipv)^n - 1$	$ipa = ipv / (1 + ipv)$ $ina = (n * ipv) / (1 + ipv)$
i.e.	$ipv = (1 + i_e)^{1/n} - 1$ $inv = n [(1 + i_e)^{1/n} - 1]$	$ipa = 1 – [1/ (1 + i_e)^{1/n}]$ $ina = n – [n/ (1 + i_e)^{1/n}]$
i.n.a.	$ipv = ina / (n - ina)$ $inv = (n * ina) / (n - ina)$	$ipa = ina / n$ $ie = [n/(n-ina)]^n - 1$
i.p.a.	$ipv = ipa / (1 - ipa)$ $inv = (n * ipa) / (1 – ipa)$	$ina = ipa * n$ $ie =[(1 / (1- ipa)]^n - 1$

Con estas fórmulas se pasa de una tasa a otra directamente, excepto por la conversión de tasas en las que cambia el período de composición, caso en el cual se debe llevar primero a la efectiva y luego a la tasa de llegada. Ejemplo: Encontrar la tasa nominal mes vencido equivalente a una tasa del 30% a.s.a.

i_{na} = 30% a.s.a.
n = 2 semestres / año

$ie = [n/(n-ina)]^n - 1$
$ie = [2/(2-0,30)]^2 - 1 = 0,3841 = 38,41\%$ e.a.

Ahora, con n = 12 se pasa de la tasa efectiva a la correspondiente tasa nominal vencida:

$inv = n [(1 + i_e)^{1/n} - 1]$
$inv = 12 [(1 + 0.3841)^{1/12} - 1] = 0.3295 =$ <u>32,95% a.m.v.</u>

Ejemplo 1: El Comerciante vende mercancías a crédito por 10 millones de pesos con un plazo de 90 días para el pago; dos meses después vende la factura a Factoring con una tasa de descuento del 24% amv. La compañía de factoring liquida el interés por los días que faltan para la maduración del documento, con la tasa de descuento, pero pese a que es una tasa vencida, el interés se cobra por anticipado, descontándose del valor nominal del título y desembolsando el valor restante; así:

Cálculo del interés: I = P x inv * d/360 = 10.000.000 x 0,24 * 30/360 = $200.000
Rembolso: Al descontar $200.000, rembolsará $9.800.000.

DESCUENTOS EN CADENA

Los descuentos en cadena son aquellos que se aplican una vez que otro se ha aplicado o se va a aplicar. Esta situación se presenta cuando, por ejemplo, se ofrecen varios descuentos sobre una misma factura. Tales descuentos pueden ser:

1. **Descuento por volumen:** consiste en otorgar un descuento que será progresivo conforme al valor de la factura o con base en el número de unidades. Este tipo de descuento intenta incentivar al comprador para que haga un pedido mayor con lo cual sus ganancias aumentarán al tener mayor descuento. Las empresas manejan para estos casos rangos de pedido, tales como:

Valor de la factura	Descuento
Menor de $10.000.000	**0 %**
Más de $10.000.000 y menos de $50.000.000	**3 %**
Más de $50.000.000 y menos de $200.000.000	**5 %**
Más de $200.000.000 y menos de $500.000.000	**15 %**
Más de $500.000.000	**25 %**

2. **Descuento por pronto pago:** Tiene por objeto incentivar al comprador a que pague lo más pronto posible, el descuento estará en relación inversa con el plazo para pagar la factura, ejemplo:

Plazo	Descuento
Al contado	10%
30 días	6%
60 días	3%
90 días	0%

3. **Descuento por embalaje:** Algunos almacenes en ocasiones hacen el pedido y solicitan que llegue sin empacar, o con un empaque más económico, entonces la fábrica concede un descuento adicional igual al costo del empaque.

4. **Descuento por temporada:** A fin de incentivar las ventas en épocas de baja demanda las fábricas ofrecen un descuento adicional para los pedidos que sean cancelados dentro de ciertas fechas.

5 **Descuento por fidelidad:** O descuento por antigüedad, es un pequeño porcentaje que se otorga a los clientes más leales.

Cuando se conceden estos descuentos, no se suman unos con otros sino que una vez que se aplicó el primero al saldo de la factura se le aplica el siguiente descuento y así sucesivamente hasta agotarlos todos. Al final, el descuento real siempre es menor que la suma de los descuentos individualmente considerados.

Ejemplo 1. El valor inicial de una factura, es $125.000.000. El comprador acredita para acceder a tres diferentes descuentos de los que otorga el almacén, a saber:

a. Por pago de contado, el 8 %
b. Por compra al por mayor, el 10 %
c. Por temporada, el 5 %

Hallar la tasa de descuento real y el valor pagado por el cliente.

No.	Valor inicial	Descuento		Valor Final
		%	**$**	
1	125.000.000	8%	10.000.000	115.000.000
2	115.000.000	10%	11.500.000	103.500.000
3	103.500.000	5%	5.175.000	98.325.000
			26.675.000	**98.325.000**

El valor del descuento fue: 26.675.000; que corresponde al 21,34% del valor inicial de la factura [$26.675.000/$125.000.000 = 0,2134 = 21,34%] y el valor pagado fue $98.325.000.

La tasa de interés de descuento en cadena está dada por la siguiente fórmula:

$$i_d = 1-[(1-i_1)(1-i_2)....(1-i_n)]$$

$\mathbf{i_d}$ **=** 1-[(1-8%)(1-10%)(1-5%)] = 1-[(1-0,08)(1-0,10)(1-0,05)] =

$\mathbf{i_d}$ = 1-[(0,92)(0,90)(0,95)] =1-[0,7866] = 0,2134 = **21,34%**

Al aplicar el $\mathbf{i_d}$ = 21,34% al valor inicial de la factura se obtiene directamente el valor del descuento: $125.000.000 x 21,34% = $26.675.000

ACEPTACIONES BANCARIAS

Las aceptaciones bancarias y financieras son letras de cambio con cargo a un comprador de bienes manufacturados mediante las cuales una entidad financiera avala o garantiza su pago al vencimiento, al poseedor. El plazo máximo es de un año, constituyen títulos indivisibles y se expiden a la orden del proveedor. Cuando la entidad financiera que da el aval es un banco se denomina aceptación bancaria, si es otro tipo de entidad financiera se denomina aceptación financiera.

Ejemplo 1:

La empresa Megasport Inc. recibe un pedido de COLOMBIANO DE BIEN para la compra de 100 unidades del producto que fabrica, por valor de $100 millones para pagar a 90 días, operación respaldada con Aceptación bancaria. El banco Aceptante entrega el documento a su cliente COLOMBIANO DE BIEN, quien a su vez la entrega a Megasport, empresa que generalmente no espera el término de maduración de estos títulos sino que los negocia en el mercado de valores.

Pues bien, al mes de haber recibido la Aceptación, Megasport la negocia con Inversionista 1 quien se la descuenta al 26,82% ie. A los 30 días, Inversionista 1 a su vez cede el documento a favor de Inversionista 2, quien lo descuenta al 30% amv.

a) A cuánto asciende el valor descontado a Megasport y a qué tasa de interés corresponde?

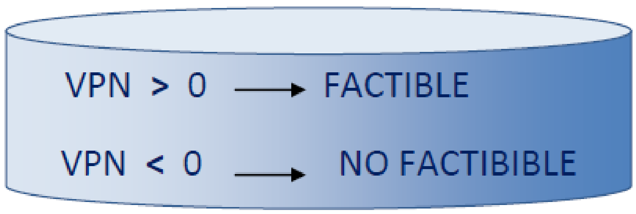
b) A Cuánto asciende la ganancia de Inversionista 1 y cuál fue su tasa de rentabilidad?

c) A Cuánto asciende la ganancia de Inversionista 2 y cuál fue su tasa de rentabilidad?

Factibilidad

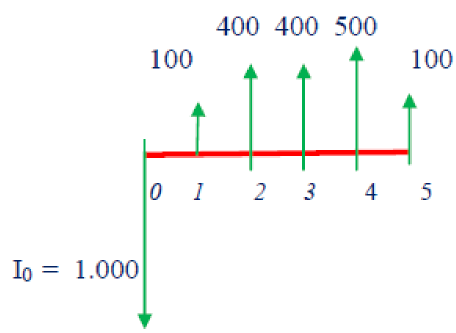
Si el VPN es positivo quiere decir que se generará riqueza o valor con la aceptación del negocio.

Si el VPN es negativo se perderá riqueza, o sea se destruirá valor con la aceptación del negocio.



Ejemplo 1. Calcular el VPN de un negocio de la empresa LA MEJOR S.A., representado en una inversión de 1.000 millones de pesos que genera unos flujos de fondos estimados de 100, 400, 400, 500 y 100 millones de pesos correspondientemente en cada uno de los cinco años de vida del proyecto, con i* = 20% anual. [Para facilitar los cálculos, puede realizar el ejercicio en millones de pesos]

Mentefacto:



Cálculos:

$VPN = -I_0 + F_1/(1+0,20)^1 + F_2/(1+0,20)^2 \quad + + + :$

$VPN = -1.000 + 100/(1+0,20) + 400/(1+0,20)^2 + 400/(1+0,20)^3 + 500/(1+0,20)^4 + 100/(1+0,20)^5$

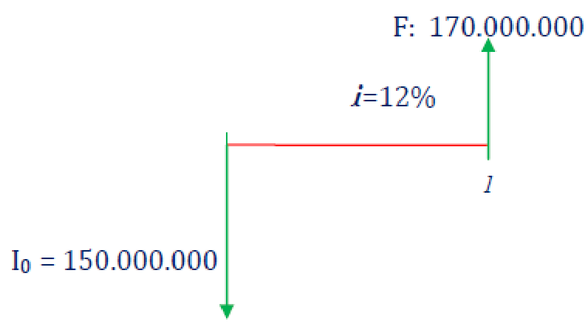
$VPN = -1.000 + 874 \quad = \quad -126$

VPN = <u>- $ 126.000.000</u>

Esto quiere decir que el negocio no es financieramente factible, porque los beneficios que se espera generar traídos a valor presente no recuperan siquiera la inversión inicial, representando una pérdida neta de $126 millones.

Ejemplo 2. Un comerciante inmobiliario tiene la posibilidad de invertir $150 millones en una edificación, la cual podría vender al cabo de una año en $170 millones. Es aconsejable el negocio, teniendo en cuenta que el comerciante puede invertir el dinero en títulos al 12% anual?

Mentefacto:



Cálculos:

VPN = - I_0 + F/(1+i)

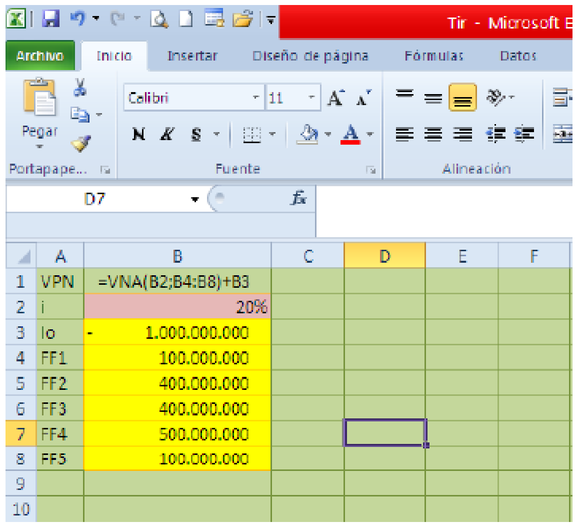
$$VPN = -150.000.000 + \frac{170.000.000}{1,12} = -150.000.000 + 151.785.714 = 1.785.714$$

Como el VPN es positivo, 1.785.714, el negocio es recomendable.

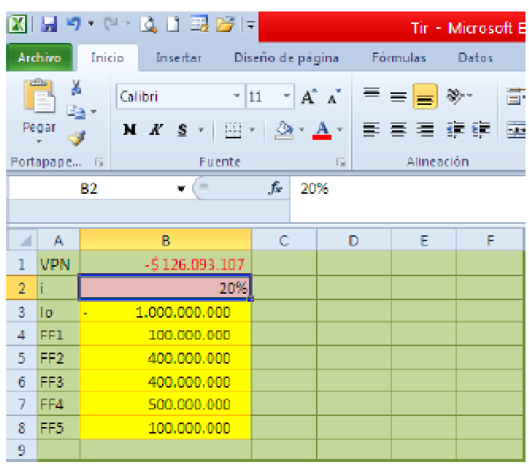
Valor Presente Neto (VPN) – En excel

Para calcular en Excel el VPN, se lista la inversión inicial (negativa) y los flujos futuros y se le aplica al rango de flujos la función financiera VNA, evaluada con la tasa de interés de oportunidad, así: =VNA(tasa; Rango de flujos), sumándole algebraicamente la inversión inicial.

El cálculo del VPN para el ejemplo 1 en Excel se ve así:



Al dar enter aparece el resultado:



Resultado: VPN = - $126.093.107

Tasa Interna de Retorno (TIR)

Concepto

La Tasa Interna de Retorno (TIR) representa la rentabilidad de los fondos que permanecen en el negocio.

Para un negocio de Inversión la TIR es la tasa de interés que genera el capital que permanece invertido (no se ha recuperado) en él.

Para un negocio de Financiación la TIR es la tasa de interés que se paga por el saldo de deuda.

Factibilidad

Un negocio de Inversión es financieramente factible si la rentabilidad que ofrece (TIR) es mayor que la rentabilidad que se obtuviese alternativamente (i*), y es no factible en caso contrario.

Un negocio de Financiación es financieramente factible si la tasa de interés que se paga por los saldos de deuda (TIR) es menor que la que se pagaría por las fuentes alternativas de financiación (i*).

INVERSIÓN:	**TIR > i***	**FACTIBLE**
	TIR < i*	**NO FACTIBIBLE**

Formulación

Partiendo del entendimiento de que el punto de indiferencia financiero (en el que da igual tomar o no el negocio) se tiene cuando la rentabilidad del negocio es igual al costo de oportunidad, o sea, TIR = i*, la formulación de TIR se da en términos de encontrar una tasa i tal que si ella fuera la tasa de oportunidad ("i*"), el negocio sería indiferente, o sea, que su Valor Presente sería cero (VPN = 0).

TIR ⟺ VPN = 0

TIR =	Tasa interna de Retorno
VPN =	Valor Presente Neto

La expresión VPN = 0 representa un polinomio de grado –n:

$VPN = 0 = FFN_0 + FFN_1/(1+i) + FFN_2/(1+i)^2 + FFN_3/(1+i)^3 + \ldots + FFN_n/(1+i)^n$,

En el cual no se puede despejar la variable "i", y es soluble sólo por métodos numéricos, como Ensayo y Error, ecuación general de la recta, interpolación lineal o mediante las herramientas de la hoja electrónica como el solver, buscar objetivo o las funciones financieras.

Sólo en el caso en el que no existan flujos intermedios entre los flujos de los momentos cero (P) y n (F), se puede hallar la TIR con la Fórmula: (Vea el ejemplo 2.)

$$TIR = (F / P)^{1/n} - 1$$

TIR =	Tasa interna de Retorno
P =	Flujo de fondos en el momento 0
F =	Flujo de fondos en el momento n

Para ilustrar se va a calcular la TIR para el ejemplo 1, mediante la interpolación lineal, la ecuación de la recta, la herramienta buscar objetivo y la función financiera TIR de Excel.

Ejemplo 1: Encontrar la TIR para el caso de la empresa LA MEJOR del ejemplo anterior usando el método de *interpolación lineal*:

TIR - Interpolación Lineal

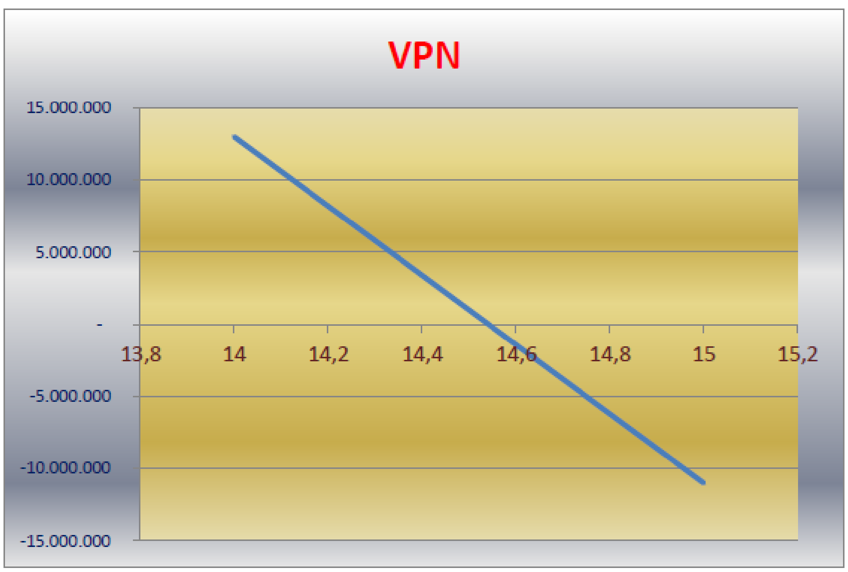
El primer paso es igualar a cero el polinomio que define el VPN:

$$VPN = -1.000 + 100/(1+i) + 400/(1+i)^2 + 400/(1+i)^3 + 500/(1+i)^4 + 100/(1+i)^5 = 0$$

Luego se ensaya con valores de i hasta que se consiga dos valores de VPN muy cercanos a cero pero de signo contrario. Es recomendable construir una tabla de valores: (1) Cuando i vale cero, el VPN es 500.000.000; (2) Cuando i vale 10, el VPN es 125.612.384; (3) Cuando i vale 13, el VPN es 39.909.671; (4) Cuando i vale 14, el VPN es 13.471.921; (5) Cuando i vale 15, el VPN se invierte, siendo – 11.985.222.

i (%)	VPN ($.)
0	500.000.000
10	125.612.384
13	39.909.671
14	13.471.921
15	-11.985.222

Así, ahora se puede afirmar que la TIR se encuentra entre 14% y 15%. Al graficar la tabla de valores se puede apreciar que el VPN disminuye a medida que la tasa de interés aumenta, hasta invertirse, dando valores negativos. La TIR será la tasa que hace cero el VPN. A simple vista se aprecia que ese valor está entre 14,5% y 14,6.



Ahora sólo resta interpolar, así:

Un 1% de diferencia en la tasa de interés |14-15| = 1	Causa ➔	25.457.143 de diferencia en el Valor Presente Neto: |-11.985.222 – 13.471.921| = 25.457.143

Ahora contamos con 2 polos correspondientes a 14% y 15%.

Cálculo de la TIR por el polo 14%

<table>
<tr><td colspan="3">Este polo tiene un desfase de **$13.471.921** de los $25. 457.143 que conforman la variación del VPN; con estos datos se establece una **regla de tres simple:**</td></tr>
<tr><td>Un 1% de diferencia en la tasa de interés |14-15| = 1</td><td>Causa ➔</td><td>25.457.143 de diferencia en el Valor Presente Neto: |-11.985.222 – 13.471.921| = 25.457.143</td></tr>
<tr><td>Qué diferencia porcentual</td><td>causará</td><td>$13.471.921 [el desfase de este polo]</td></tr>
<tr><td colspan="3">**X** = 13.471.921/25.457.143= 0,52920003631, que adicionado algebraicamente al valor del polo: 14%, da una **TIR: 14,52920003631** [14 + 0,52920003631]</td></tr>
</table>

Cálculo de la TIR por el polo 15%

<table>
<tr><td colspan="3">Este polo tiene un desfase de **-$11.985.222** de los $25. 457.143 que conforman la variación del VPN; con estos datos se establece una **regla de tres simple:**</td></tr>
<tr><td>Un 1% de diferencia en la tasa de interés |14-15| = 1</td><td>Causa ➔</td><td>25.457.143 de diferencia en el Valor Presente Neto: |-11.985.222 – 13.471.921| = 25.457.143</td></tr>
<tr><td>Qué diferencia porcentual</td><td>Causará</td><td>- $11.985.222 [el desfase de este polo]</td></tr>
<tr><td colspan="3">**X** =-11.985.222/25.457.143= - 0,47079996368, que adicionado algebraicamente al valor del polo: 15%, da una **TIR: 14,5292000364** [15 - 0,47079996368]</td></tr>
</table>

TIR – Ecuación de la Recta

En este procedimento se toman dos puntos cualesquiera de la tabla de valores y se calcula la pendiente [m]de la recta que describe el VPN. La altura de la recta, el componente “y” es el VPN mientras que el componente x es la tasa de Interés en todo su recorrido, pero en el punto en que y = 0, esa tasa es la TIR.

Sean los puntos: P_1 (14, 13.471.921) y P_2 (15, -11.985.222)

Ahora se determina la ecuación general de la recta del VPN con la ecuación Punto pendiente: $y - y_0 = m\ (x - x_0)$; m ya está calculado: -25.457.143 y el punto (x_0, y_0) es cualquiera de la recta; en este caso, lo haremos con P_1 (14, 13.471.921).

y – 13.471.921 = -25.457.143 (x – 14)

y – 13.471.921 = -25.457.143 x + 356.400.002

y = -25.457.143 x + 356.400.002 + 13.471.921

y = -25.457.143 x + 369.871.923

Ahora, se iguala "y" a cero para despejar "x" que corresponde a la TIR

0 = -25.457.143 x + 369.871.923

25.457.143 x = 369.871.923

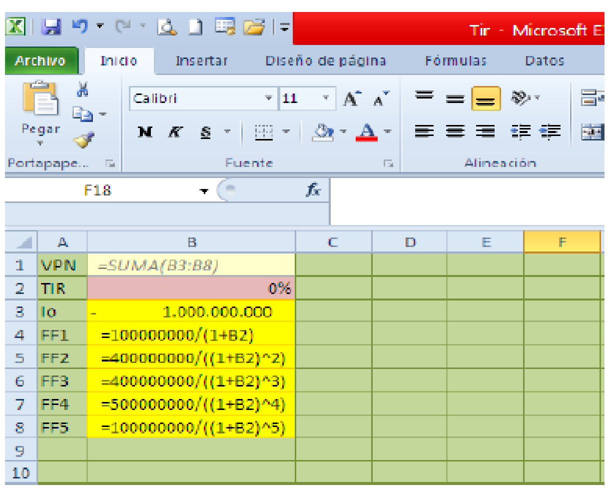
x = 369.871.923/25.457.143

x= 14,529200363

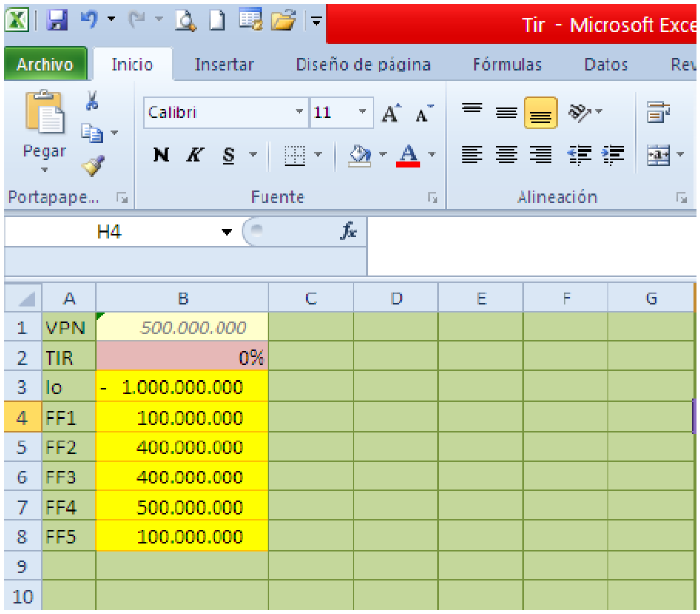
TIR: 14,5292000363 %

TIR – Buscar Objetivo

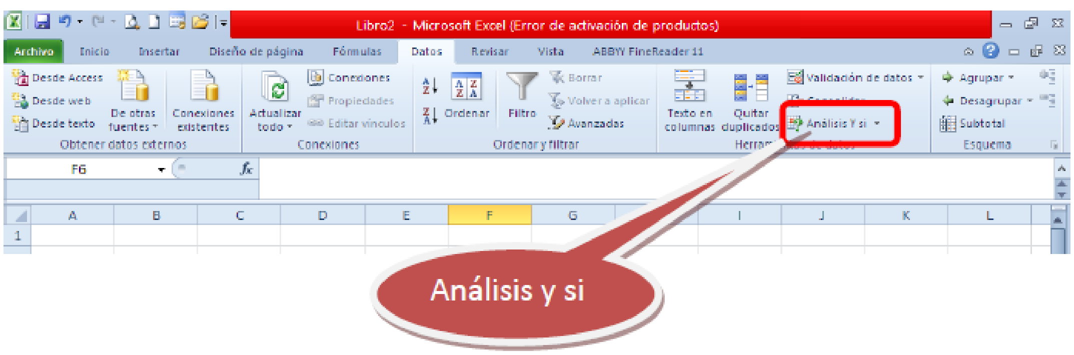
En la hoja electrónica de excel se digita: VPN, TIR y flujos en la columna (Variables) y en la coluna B los valores presentes de los flujos, teniendo en cuenta que la inversión inicial resta. En la celda B1 va la suma de la inversión inicial y todos los flujos y en la celda B2, 0%, así:



Ahora aparece la siguiente pantalla:



En la cinta de opciones del menu principal de excel se seleciona DATOS y luego ANÁLISIS Y SI, tal como se muestra en la siguiente pantalla:



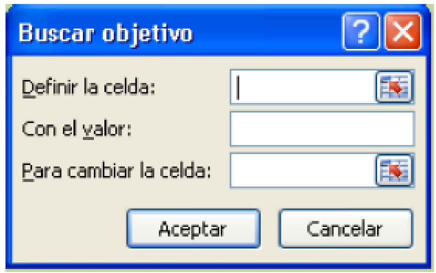
Aquí se despliega un menú con tres opciones: **Administrador de escenarios**, **Buscar objetivo** y **Tabla de datos**; se escoge la segunda opción: BUSCAR OBJETIVO:

Administrador de escenarios....

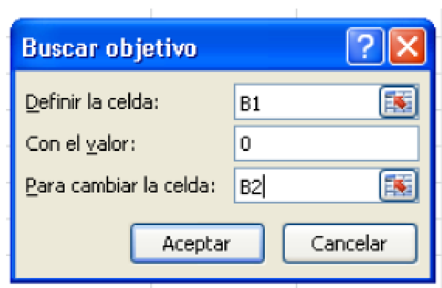
Buscar objetivo....

Tabla de datos....

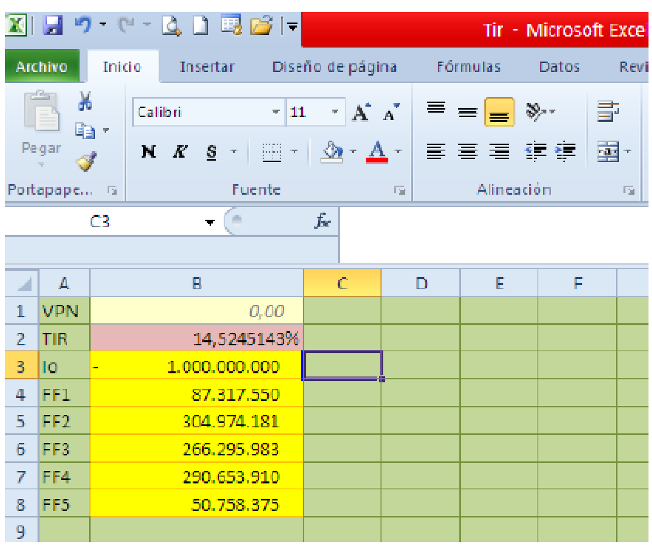
Ahora se despliega el siguiente cuadro:



En el cual se debe definir la celda donde está el VPN, en este caso, la celda B1, con el valor cero [0], para cambiar la celda correspondiente al interés, que será la TIR cuando VPN sea cero; en este caso, es la celda B2; así:



Aquí se le da aceptar dos veces y aparece la siguiente pantalla:

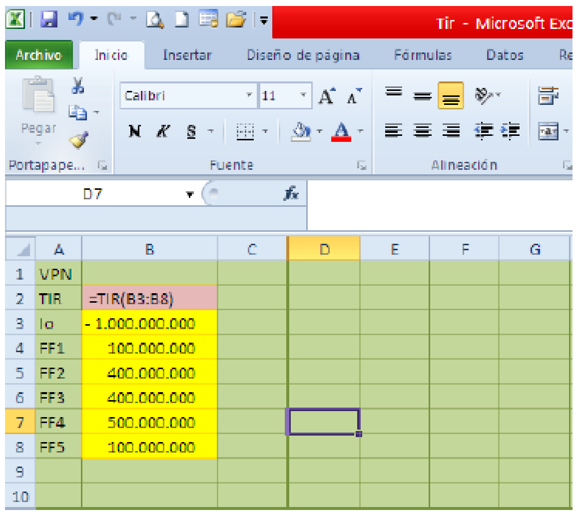


	A	B
1	VPN	0,00
2	TIR	14,5245143%
3	Io	- 1.000.000.000
4	FF1	87.317.550
5	FF2	304.974.181
6	FF3	266.295.983
7	FF4	290.653.910
8	FF5	50.758.375
9		

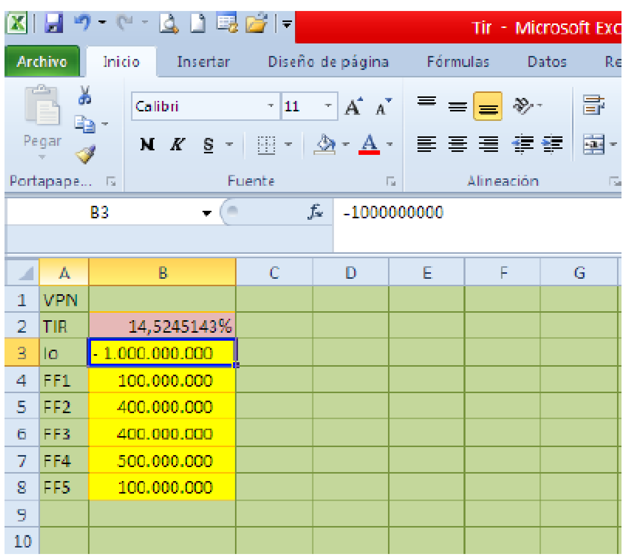
TIR: 14,5245143%

TIR – Funciones Financieras en excel

En la hoja electrónica de excel se digita: VPN, TIR y flujos en la columna (Variables) y en la coluna B los valores FUTUROS de los flujos, teniendo en cuenta que la inversión inicial resta. En la celda B2 se escribe =TIR(B3:B8) y listo.



Excel arroja el resultado en B2:



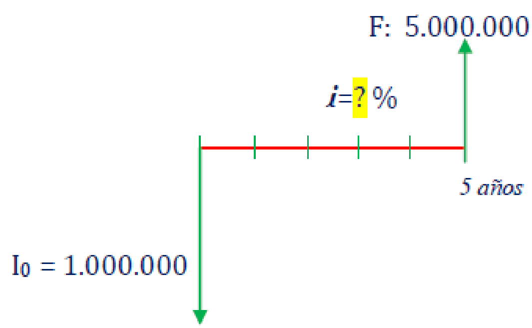
TIR: 14,5245143%

Ahora se puede comparar la TIR calculada por los diferentes métodos y se observa que aparecen diferencias después de varios decimales, con lo cual se concluye que cualquiera de los métodos es apropiado, muy aproximado al valor real y las diferencias se pueden desestimar.

MÉTODO DE CÁLCULO	VALOR OBTENIDO
Interpolación lineal – Polo 1	14,52920003631
Interpolación lineal – Polo 2	14,5292000364
Ecuación General de la recta	14,5292000363
Herramienta Buscar Objetivo - excel	14,5245143
Función financiera - excel	14,5245143

Ejemplo 2: El fondo mutuo de inversiones MIFONDO, promete reintegrar \$5 dentro de cinco años por cada \$1 invertido hoy sin retiros parciales durante este período. ¿Cuál es la TIR de dicha inversión?

Mentefacto:



Cálculos:

Como en este caso, existe un solo flujo futuro, la TIR se puede calcular de dos maneras:

1) Igualando a cero el VPN

$VPN = - I_0 + F/(1+i)^n = 0$

$- 1.000.000 + 5.000.000/(1+i)^5 = 0$

$5.000.000/(1+i)^5 = 1.000.000$

$5.000.000 = 1.000.000\ (1+i)^5$

$5.000.000\ /\ 1.000.000 = (1+i)^5$

$5 = (1+i)^5$

$(5)^{1/5} = [(1+i)^5]^{1/5}$

$(5)^{1/5} = (1+i)$

$(5)^{1/5} - 1 = i$

$(5)^{0,2} - 1 = i$

$1,3797 - 1 = i$

$0,3797 = i$

$i = 37,97\%$

TIR = <u>37,97% anual</u>

2) Directamente

Al existir un solo flujo futuro, la TIR se puede calcular directamente con la fórmula de interés compuesto, con:

P = $1.000.000

F = $5.000.000

n = 5 años

$\mathbf{i = (F / P)^{1/n} - 1}$

$\mathbf{TIR = (F / P)^{1/n} - 1}$

$TIR = (5.000.000/1.000.000)^{1/5} - 1$

$TIR = (5)^{0,2} - 1$

$TIR = 1,3797 - 1$

$TIR = 0,3797$

TIR = <u>37,97% anual.</u>

Comparación de Proyectos

De forma genérica, un ***proyecto de Inversión*** es un conjunto de Ingresos y Egresos de dinero que aparecen en diferentes momentos. El VPN es, en primera instancia la herramienta capaz de calificar como factible o no factible un proyecto, pero además sirve para comparar dos o más proyectos

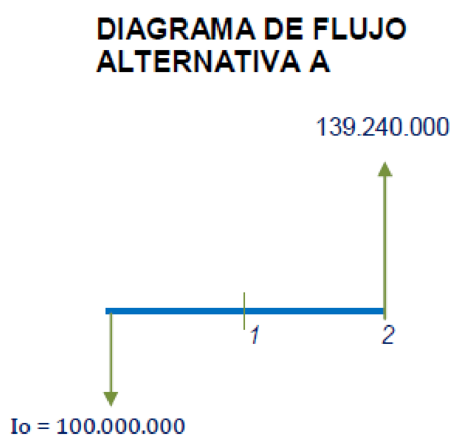
Comparar dos proyectos puede no resultar tan sencillo; se requiere comparabilidad práctica y el uso de la herramienta financiera apropiada. Entre las herramientas más utilizadas al comparar proyectos se encuentran: El Valor Presente Neto [VPN], la Tasa Interna de Retorno [TIR], la relación Beneficio /Costo [B/C], el Costo Capitalizado [C] y el Costo Anual Uniforme Equivalente [CAUE].

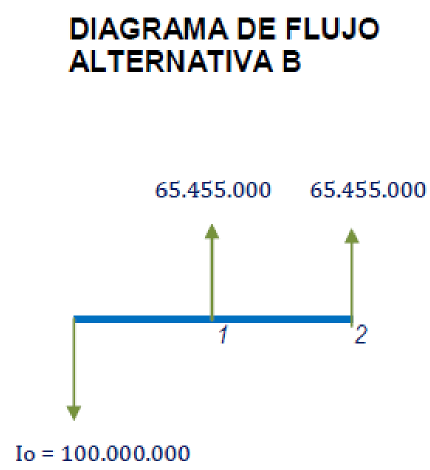
Ejemplo 1. Un proyecto de inversión de $100 millones puede retornar un pago único por valor de $139.240.000 al cabo de dos años [alternativa A] o, alternativamente, dos pagos iguales anuales de $65.455.000 [alternativa B]. El inversionista puede colocar el capital en títulos que rentan el 10% efectivo anual [tasa de oportunidad: $i^* = 10\%$ ie].

a) Comparar los dos proyectos utilizando el VPN
b) Realizar la comparación utilizando la TIR
c) Decidir entre las dos alternativas de inversión

Comparación de los proyectos mediante el VPN

Veamos el diagrama de flujos de fondos para cada alternativa del proyecto:





En forma general, entre dos alternativas distintas, la que genere mayor VPN es mejor financieramente que la que genera menor VPN

VPN alternativa A

$VPN_{A\,(10\%)} = - I_0 + F/(1+i)^n$

$$VPN = -100.000.000 + \frac{139.240.000}{1{,}10^{\;2}} = -100.000.000 + 115.074.380$$

VPN = 15.074.380

VPN alternativa B

$VPN_{B\,(10\%)} = - I_0 + F_1/(1+i)^1 + F_2/(1+i)^2$

$$VPN = -100.000.000 + \frac{65.455.000}{1{,}10^{\;1}} + \frac{65.455.000}{1{,}10^{\;2}} = -100.000.000 + 59.504.545 + 54.095.041$$

VPN = 13.599.587

Podría concluirse que la alternativa A es mejor que la B

$VPN_{A\,(10\%)} = 15.074.380 > VPN_{B\,(10\%)} = 13.599.587$

Comparación de los proyectos mediante la TIR

Igualando a cero el respectivo polinomio de los VPN y desarrollando su cálculo, se llega al siguiente resultado:

$VPN_{A\,(18\%)} = 0 \rightarrow TIR_A = 18\%$

$VPN_{B\,(20\%)} = 0 \rightarrow TIR_B = 20\%$

Podría concluirse entonces que la alternativa B es mejor que la A; tal conclusión es errada por cuanto las dos alternativas no se pueden comparar de esa manera, ya que la B libera flujos que sólo pueden rentar una tasa igual a la tasa de oportunidad, que en este caso es del 10%, ya que la TIR se produce ***únicamente mientras los recursos permanecen***

Calcule la viabilidad del Proyecto con una tasa de oportunidad para el inversionista del 10% anual usando la técnica B/C.

Solución:

Valor Presente Neto de los Ingresos

$VPN_{(10\%)} = \sum F_n/(1+i)^n$

$$VPN = \frac{2.000.000.000}{1,10} + \frac{3.000.000.000}{1,10^{\ 2}} + \frac{4.000.000.000}{1,10^{\ 3}} + \frac{5.000.000.000}{(1,10)^4}$$

$VPN_{INGRESOS}$ = 10.717'847.142

Valor Presente Neto de los Egresos

El VPN de los egresos está dado por un único pago de $10.000'000.000 en el momento cero, al inicio del proyecto, por tanto no hay que realizar cálculo alguno.

$VPN_{EGRESOS}$ = 10.000'000.000

$$B/C_{(i)} = \frac{VPN\ ingresos\ (i)}{VPN\ egresos\ (i)} = \frac{10.717'847.142}{10.000'000.000} = 1,072$$

Se concluye que como la relación Beneficio / Costo es mayor que 1, el proyecto es viable.

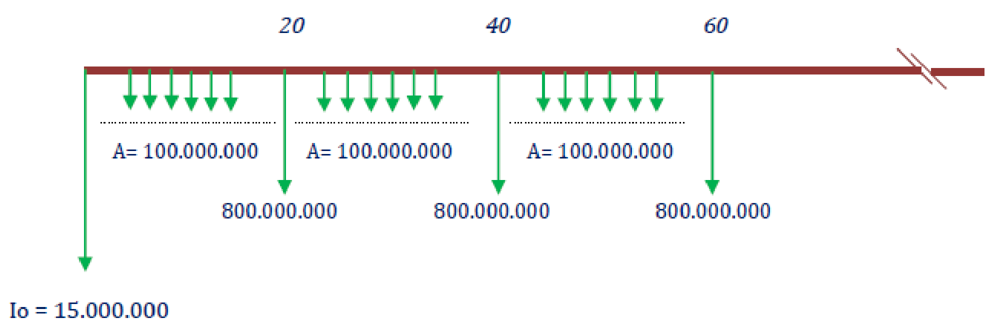
COSTO CAPITALIZADO

Al igual que el índice B/C, este es utilizado para evaluar grandes proyectos de inversión pública, con cuantiosas inversiones y larga vida, como construir puentes, carreteras, parques, edificios, etc. Este modelo de análisis se fundamenta en las perpetuidades y tiene como característica fundamental que no genera ingresos monetarios, es decir, se trata de proyectos sociales en los cuales, financieramente será mejor el que reporte menor costo capitalizado, el cual es homologado con el valor presente [**P** $n \to \infty$] de las alícuotas perpetuas [**A** $n \to \infty$]. Así, el Costo presente equivalente o *COSTO CAPITALIZADO* [C] será la sumatoria de los costos presentes equivalentes [$C_1 + C_2 + C_3 + C_n$] del proyecto.

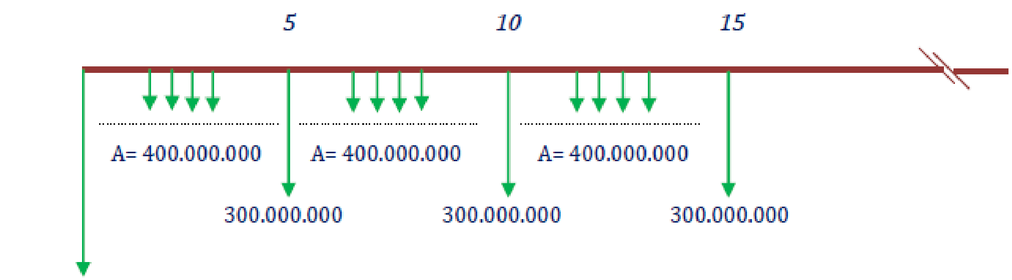
Ejemplo 1. La Alcaldía de Palmira está considerando Construir un nuevo CAMP para su ciudad, el cual tendría un costo de $15.000 millones, requiriendo inversiones adicionales cada 20 años de $800 millones. El mantenimiento del edificio tasaría un costo anual de $100 millones. Un asesor le propone reconstruir el viejo CAMP para lo cual la inversión inicial sería de $10.000 millones, requiriendo inversiones adicionales cada 5 años por $300 millones. El mantenimiento del edificio reconstruido tasaría un costo anual 4 veces mayor al mantenimiento anual de la edificación nueva.

-⧐ Diagrama de flujos de las dos alternativas:

A. Construir



B. Reconstruir



-⧐Análisis de la alternativa 1

En la Opción 1 se observan 3 tipos de flujos [costos], a saber:

a) La inversión o costo inicial de $15.000 millones
b) Una Alícuota perpetua anual de mantenimiento por $100 millones
c) Una Alícuota cada 20 años de $800 millones.

Solución:

a) C_1, la inversión o costo inicial de $15.000 millones es un costo presente, no requiere cálculo alguno: **C_1 = $15.000.000.000**

b) C_2, Mantenimiento: es una alícuota perpetua por valor de $100.000.000

$C_2 = P_{n \to \infty} = A / i$

$C_2 = P_{n \to \infty} = 100.000.000 / 10\%$

$C_2 = P_{n \to \infty} = 100.000.000 / 0,1$

$C_2 = P_{n \to \infty} = 1.000.000.000$

APÉNDICE 1

MANUAL DE FÓRMULAS - MATEMÁTICAS FINANCIERAS

VALOR PRESENTE (P)			
1	(P / F i n)	$P = \frac{F}{(1+i)^n}$	Halla el valor **P**resente, conociendo el valor **F**uturo, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
2	(P / A i n)	$P = \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i\,(1+i)^n}$	Halla el valor **P**resente, conociendo el valor de la **A**lícuota, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
3	(P / A_A i n)	$P = \frac{A_A[(1+i)^n - 1]}{[i\ \ 1+i\ ^{n-1}]}$	Halla el valor **P**resente, conociendo el valor de la **A**lícuota **A**nticipada, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
4	(P / i, A $_{n\to\infty}$)	$P = \frac{A_{n \to \infty}}{i}$	Halla el valor **P**resente, conociendo el valor de una **A**lícuota **P**erpetua y la tasa de **i**nterés
5	(P/A, i, n, pm)	$P = \frac{A[\ \ 1+i\ ^{n-pm} - 1}{[i\ \ 1+i\ ^{n-pm}]}$	Halla el valor **P**resente, de una **A**lícuota conociendo el Plazo Muerto **pm**, el Valor **P**resente, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
6	(P/A, i, n, PG)	$P = \frac{A[\ \ 1+i\ ^{n-PG} - 1]}{i[\ 1+i\ ^{n}]}$	Halla el valor **P**resente, de una **A**lícuota conociendo el periodo de gracia, el valor **P**resente, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
VALOR FUTURO (F)			
1	(F / P i n)	$F = P\,(1+i)^n$	Halla el valor **F**uturo, conociendo el valor **P**resente, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
2	(F / A i n)	$F = \frac{A[(1+i)^n - 1]}{i}$	Halla el valor **F**uturo, conociendo el valor de la **A**lícuota, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
3	(F / A_A i n)	$F = \frac{AA[\ 1+i\ ^{n+1} - (1+i)]}{i}$	Halla el valor **F**uturo, conociendo el valor de la **A**lícuota **A**nticipada, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
ALÍCUOTA VENCIDA (A)			
1	(A / P i n)	$A = \frac{P\,i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$	Halla el valor de la **A**lícuota, conociendo el valor **P**resente, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos

2	(A / F i n)	$A = \frac{i\,F}{(1+i)^n - 1}$	Halla el valor de la **A**lícuota, conociendo el valor **F**uturo, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
3	(A / P i n pm)	$A = \frac{P\,i\,[\ 1+i\ ^{n-pm}]}{[\ 1+i\ ^{n-pm} - 1]}$	Halla el valor de la **A**lícuota, conociendo el plazo muerto **pm**, el valor **P**resente, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
4	(A / P i n PG)	$A = \frac{P\,i\,[\ 1+i\ ^{n}]}{[\ 1+i\ ^{n-PG} - 1]}$	Halla el valor de la **A**lícuota, conociendo el **P**eriodo de **G**racia, el valor **P**resente, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
ALÍCUOTA ANTICIPADA (A_A)			
1	(A_A / P i n)	$A_A = \frac{P[\,i\ 1+i\ ^{n-1}]}{[\ 1+i\ ^{n} - 1]}$	Halla el valor de la **A**lícuota **A**nticipada, conociendo el valor **P**resente, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
2	(A_A/ F i n)	$A_A = \frac{F\,i}{[(1+i)^{n+1} - (1+i)}$	Halla el valor de la **A**lícuota **A**nticipada, conociendo el valor **F**uturo, la tasa de **i**nterés y el **n**úmero de períodos
ALÍCUOTA A PERPETUIDAD ($A_{n\to\infty}$)			
1	($A_{n\to\infty}$ / P i)	$A_{n \to \infty} = i\,x\,P$	Halla el valor de la **A**lícuota Perpetua conociendo el valor **P**resente, y la tasa de **i**nterés
TASA DE INTERES (i)			
1	(i / F P n)	$i = (F/P)^{\frac{1}{n}} - 1$	Halla la tasa de **i**nterés conociendo el valor **F**uturo, el valor **P**resente y el **n**úmero de periodos
2	($i_{n\to\infty}$ /A P)	$i_{n \to \infty} = \frac{A}{P}$	Halla la tasa de **i**nterés de una **A**lícuota Perpetua conociendo el valor **P**resente, y la **A**lícuota Perpetua
NUMERO DE PERIODOS (n)			
1	(n / F P i)	$n = \frac{\log(F/P)}{log(1+i)}$	Halla el **n**úmero de periodos dado el valor **F**uturo, el valor **P**resente y la tasa de **i**nterés
2	(n / F i A)	$n = \frac{\log(Fi/A+1)}{log(1+i)}$	Halla el **n**úmero de periodos conociendo valor **F**uturo, la tasa de **i**nterés y el valor de la **A**lícuota
GRADIENTE ARITMÉTICO			
1	$(FFj/B\ j\ G)$	$FFj = B +\ \ j - 1\ \ G$	Halla el valor de la cuota # **j** conociendo el valor de la primera cuota **[B]** y el gradiente **[G]** de la serie gradiente aritmética

2	$(A^{*}/G\,i\,n)$	$A*= G[\frac{1}{i} - \frac{n}{1+i^{\ n}-1}]$	Halla el valor de la **A**lícuota de los gradientes, dado **G**, tasa de **i**nterés y **n**úmero de periodos
3	$(G/A^{*}i\,n)$	$G = \frac{A*}{[\frac{1}{i} - \frac{n}{1+i^{\ n}-1}]}$	Halla el valor del **G**radiente conociendo **A***, tasa de **i**nterés y **n**úmero de periodos
4	$(A/B\,A^{*})$	$A = B + A^{*}$	Halla la Alícuota conociendo **B** y **A***
5	$(A^{*}/B\,A)$	$A^{*} = A - B$	Halla **A*** conociendo **A** y **B**
6	$(B/A\,A^{*})$	$B = A - A^{*})$	Halla **B** conociendo **A** y **A***
7	$(P/G\,i\,n)$	$P = \frac{G}{i}[\frac{1+i^{\ n}-1-n\,i}{i\ \ 1+i^{\ n}}]$	Halla el valor **P**resente de la serie de gradientes desde el periodo 2 hasta n (sin el pago inicial B) dado **G**radiente, tasa de **i**nterés y **n**úmero de periodos
8	$(F/G\,i\,n)$	$F = \frac{G}{i}[\frac{1+i^{\ n}-1}{i} - n]$	Halla el valor **F**uturo de la serie de gradientes sin el pago inicial B dado **G**radiente, tasa de **i**nterés y **n**úmero de periodos
GRADIENTE GEOMÉTRICO			
1	$(FF_{k}/B\,j\,k)$	$FFk = B\ \ 1+J^{\ k-1}$	Halla el valor de la cuota #**k**, dado **B**, **J** y **K**
2	$(P/B\,i\,n\,j)$	$P = \frac{B}{(J-i)}[\frac{1+J^{\ n}}{1+i^{\ n}} - 1]$	Halla el valor **P**resente de toda la serie, incluida el pago inicial (B) conociendo **B**, tasa de **i**nterés, **n**úmero de periodos y **J**
3	$(P/B\,i\,n\,j)$	$P = B[\frac{1+i^{\ n}-\ \ 1+J^{\ n}}{(i-J)\ \ 1+i^{\ n}}]$	
4	$(F/B\,i\,n\,j)$	$F = B[\frac{1+i^{\ n}-\ \ 1+J^{\ n}}{(i-J)}]$	Halla el valor **F**uturo de toda la serie, incluido el pago inicial (B) conociendo **B** tasa de **i**nterés, **n**úmero de periodos y **J**
5	$(F_{con\ i=j}/B\ i=j\ n)$	$F_{con\ i=j} = Bn(1+i)^{n-1}$	Halla **F** de toda la serie, incluido el pago inicial B, dado **B**, **i=j**, **n**
6	$(B/F\,i\,n\,j)$	$B = \frac{F(i-J)}{1+i^{\ n}-\ \ 1+J^{\ n}}$	Halla el primer pago **B** dado **F**, **i**, **n**, **j**
7	$(B/F\,i\,n\,j)$	$B = \frac{F}{n\ \ 1+i^{\ n-1}}$	
8	$(B/P\,i\,n\,j)$	$B = \frac{P(i-J)\ \ 1+i^{\ n}}{1+i^{\ n}-\ 1+J^{\ n}}$	Halla el pago inicial (**B**) dado **P**, **i**, **n**, **J**
9	$(B/P\,i\,n\,j)$	$B = \frac{P\ (J-i)}{[\frac{1+j^{\ n}}{1+i^{\ n}}\ -1]}$	